交錯級數收斂性的探討

沈淵源

February 10, 2011

摘要

我們首先釐清何謂無窮級數，得以免去諸多的混淆與迷惑。接著透過數學套裝軟體 MATHEMATICA[1]，用實驗的方法來探討交錯調和級數之所以收斂的緣由；再用分析的方法確認之。而這個方法，又很自然地可推廣到一般的情況；從而得知，交錯級數之所以收斂的充份條件。最後我們藉著歐拉常數[2] γ 來說明交錯調和級數是如何收斂於 $\ln 2$ 的前因後果。

1 引言：無窮的遐思？

「無窮和 (infinite summation)」乃是一矛盾之語詞 (oxymoron)，其中的「無窮 (infinite)」表示沒有窮盡、不停止、永不止息的意思，而「和 (summation)」則意味著抵達某一高潮 (summit) 的行動、達到一總數、得到一結論。我們如何對一永不止息的過程作一個結論呢？這有

[1]數學套裝軟體 MATHEMATICA 的簡介請參考數論輕鬆遊 [6] 第一節。

[2]歐拉常數 $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n)$。

如 ZENO[3] 所提出的一些似是而非的理論。因此之故，我們就以無窮級數 (infinite series) 來代替無窮和之混淆，但仍須對此術語作一嚴格的定義。怎麼說呢？由於我們人的有限，當我們談到無限的時候，就必須特別的謹慎小心。有時候，直覺可能引導我們到一個錯誤的方向去，譬如眾所周知的歐拉數 $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$；直覺告訴我們，當 n 很大的時候 $\{1+\frac{1}{n}\}$ 會趨近於 1，而 1 的任何次方是 1，所以 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 應該會趨近於 1 才是。同樣的危險有可能會出現在無窮和上面，且看交錯級數如下：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\frac{5}{6}-\frac{6}{7}+-\cdots 。$$

若以不同的組合來看此一無窮和，就會得到完全不同，甚至是矛盾的結果，如下所示：

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1} &= (\frac{1}{2}-\frac{2}{3})+(\frac{3}{4}-\frac{4}{5})+(\frac{5}{6}-\frac{6}{7})+\cdots<0，\\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1} &= \frac{1}{2}+(-\frac{2}{3}+\frac{3}{4})+(-\frac{4}{5}+\frac{5}{6})+(-\frac{6}{7}+\frac{7}{8})+\cdots>0。\end{aligned}$$

在第一種組合當中，每個括弧內的數皆小於 0，所以和必定小於 0；在第二種組合，除第一項 $\frac{1}{2}$ 之外的每個括弧內的數皆大於 0，所以和必定大於 0。因此之故我們必須對無窮級數及其收斂性等作一嚴格的定義，而萬萬不能以無窮和一語大而化之來敷衍了事！

[3]芝諾 ZENO OF ELEA ($\sim$ 490 BC– 425 BC) 是希臘的哲學家。提出一些似是而非的理論來說明假設任何東西都可分成無窮多等份所造成的困境。其中最有名的一個稱爲 Achilles 與烏龜。ZENO 說：雖然 Achilles 是史詩《Iliad》中的英雄人物，但若要他與一頭烏龜賽跑，只要烏龜先跑一段路，他就永遠追不上烏龜的，因爲當他跑到原先烏龜所在的位置，烏龜已經又跑到他的前方。

【定義】給予一實數數列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，我們定義n項部份和爲

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k \qquad \forall n\in\mathbb{N}\text{。}$$

所謂的無窮級數，我們指的就是這個部份和數列$\{S_n\}$，以符號$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$表示之。若此部份和數列$\{S_n\}$是收斂的，亦即其極限值存在；我們就說此無窮級數$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$是收斂的，否則稱之爲發散的。我們將這個部份和數列$\{S_n\}$的極限值稱之爲無窮級數的和，仍然用同樣的符號$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$來表示。

一般而言，計算一個無窮級數的和需要兩個步驟；其一爲想盡各式各樣的辦法來找出部份和S_n的公式，然後再根據這個公式來計算其極限值。第一個步驟往往很難，除了幾何級數(Geometric Series)、伸縮級數(Telescoping Series)及一些較特殊的級數外，差不多大部份的級數都被摒除在外。所以我們只好退而求其次，只問極限值存在嗎？關於這個，我們有許許多多判別級數收斂性的方法。至於求和的問題，只好訴諸所謂的數值方法來求其近似值；而這也是Mathematica可以大大發揮的地方！

爲了說明上述求和步驟之二重奏，我們一起來看一個大家所熟悉的級數如下：且看交錯調和級數

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+-\cdots\text{。}$$

大家都知道這個級數是收斂的，它的和到底是多少呢？在下一節中，我們先用實驗的方法探討一下，這個級數是如何收斂的；然後再用分析的方法來確認之，並藉著定義歐拉常數γ的那個數列$\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\}$來說明交錯調和級數是如何收斂於$\ln 2$的前因後果。

2 實驗：交錯調和級數爲何收斂？

令 $n \in \mathbb{N}$ 且令 $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$，則其對應的級數 $\sum a_n$ 就是所謂的交錯調和級數

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + - \cdots \text{。}$$

令 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 爲其 n 項部份和。級數是否收斂，完全看此部份和數列 $\{S_n\}$ 是否收斂；所以當務之急乃觀察此部份和數列 $\{S_n\}$ 的變動趨勢，由此再來推斷極限值 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在與否。

(a) 先定義部份和數列 `s[n]` 如下：

```
In[1]:= s[n_]:=Sum[(-1)^(k+1)/k,{k,1,n}]
```

(b) 經驗告訴我們，要判斷極限 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 是否存在，最好最快的方法是觀察其圖形。目前的變數 n 是離散的 (discrete)，所以我們只能用 `ListPlot` 來畫圖形，如下：

```
In[2]:= {h1=ListPlot[Table[s[n],{n,50}]],
          h2=ListPlot[Table[s[n],{n,50}],PlotJoined->True]};
        Show[GraphicsArray[{{h1,h2}}]]
```

所得到的描點圖及連結圖，請見圖 1。

(c) 圖 1 給我們的感覺是極限 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 會存在。但危險的是所觀察的項數太少了，可能導致錯誤的猜測。所以就讓我們將 n 提高到 6000 看看變化如何。

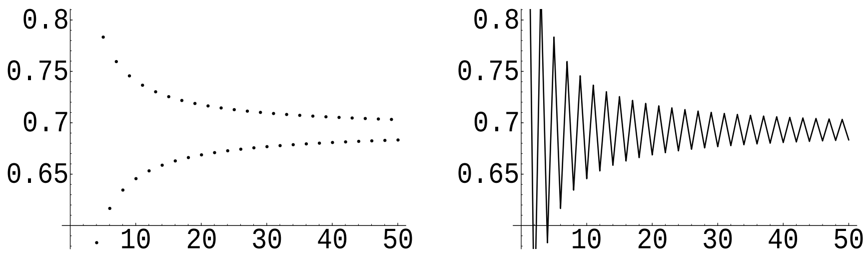

圖 1: 部份和數列 $\{S_n\}$ 前 50 項的描點圖及連結圖。

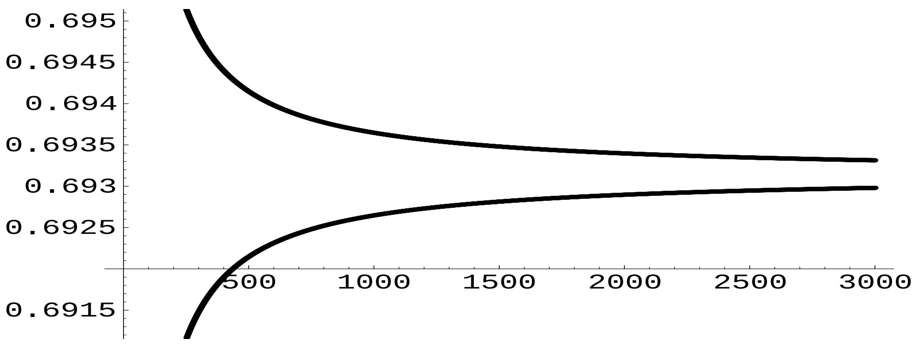

圖 2: 部份和數列 $\{S_n\}$ 前 6000 項的描點圖。

```
In[3]:= ListPlot[Table[s[n],{n,6000}]
```

所得到的描點圖，請見圖 2。

(d) 圖 2 讓我們更有信心相信極限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 是會存在的。很明顯地，兵分二路；一路由上往下而另一路由下往上，卻往同一個目標奔跑。這告訴我們部份和數列 $\{S_n\}$ 包含兩個子數列，一個遞增而另一個則遞減。很自然地我們會猜想到，這有可能就是奇數項及偶數項

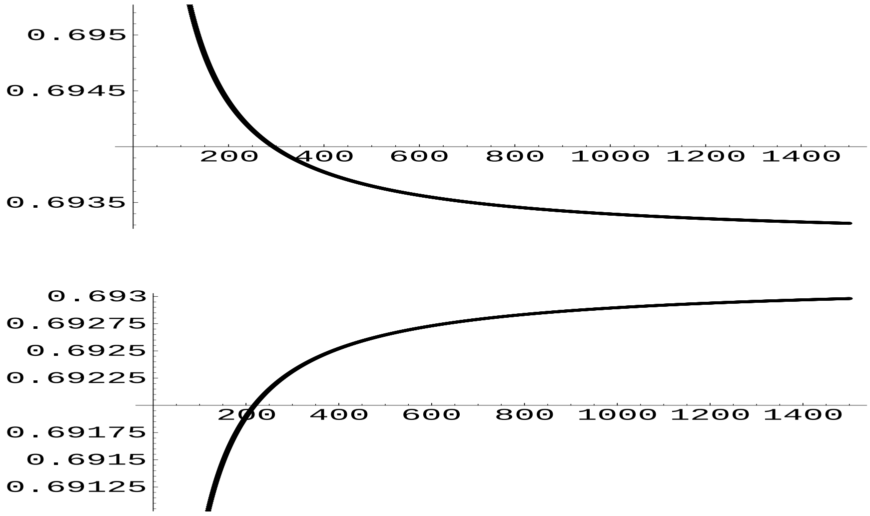

圖 3: 部份和數列 $\{S_n\}$ 前 3000 項之奇數項及偶數項的描點圖。

所形成的子數列。茲確認如下：

```
In[4]:= {odd=ListPlot[Table[s[n],{n,1,6000,2}]],
        even=ListPlot[Table[s[n],{n,2,6000,2}]]};
        Show[GraphicsArray[{{odd},{even}}]]
```

圖 3 所見，乃是輸出 Out[4] 所得到的描點圖 (表面上看起來好像是連續的圖形，此乃因爲上下各包含 3000 個點的描點圖)；上方爲奇數項所形成的子數列 $\{S_{2n+1}\}_{n=0}^{2999}$ 之描點圖，下方則爲偶數項所形成的子數列 $\{S_{2n}\}_{n=1}^{3000}$ 之描點圖。所以從圖形的研判，我們只能確認上述的猜想是對的；因而才值得我們花時間，來證明上述的猜想的確是正確的。

3 實驗之分析：收斂之確認與交錯級數判別法

由上面的實驗，我們得到以下的猜測：

【猜測】交錯調和級數

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+-\cdots$$

是收斂的。其部分和數列 $\{S_n\}$ 收斂方式分成兩道：一道由上往下，來自較大的奇數項所形成的子數列 $\{S_{2n+1}\}$，而另一道則由下往上，來自較小的偶數項所形成的子數列 $\{S_{2n}\}$，且兩道往同一目標奔跑。

如上述實驗中所採用的符號，我們有

$$S_{2n+1}-S_{2n-1}=a_{2n+1}+a_{2n}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n}<0 \quad \forall n\in\mathbb{N}，$$

所以奇數項所形成的子數列 $\{S_{2n+1}\}$ 爲一嚴格遞減數列。同樣地，我們有

$$S_{2n+2}-S_{2n}=a_{2n+1}+a_{2n+2}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}>0 \quad \forall n\in\mathbb{N}，$$

所以偶數項所形成的子數列 $\{S_{2n}\}$ 爲一嚴格遞增數列。其次我們有

$$S_{2n+1}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{2n+1}>0，$$

以及

$$S_{2n}=1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{2n-2}+\frac{1}{2n-1}\right)-\frac{1}{2n}<1。$$

因此我們得到，奇數項所形成的子數列 $\{S_{2n+1}\}$ 爲一嚴格遞減有下界 (0 爲其下界) 的數列，而偶數項所形成的子數列 $\{S_{2n}\}$ 則爲一嚴格遞增

有上界(1爲其上界)的數列。單調收斂定理[4]告訴我們，這兩個子數列$\{S_{2n+1}\}$與$\{S_{2n}\}$都是收斂的；說是收斂於S_{odd}及S_{even}。另一方面我們有

$$S_{2n+1}-S_{2n}=a_{2n+1}=\frac{1}{2n+1}\to 0\,,\ 若\ n\to\infty$$

$$\Longrightarrow S_{\text{odd}}-S_{\text{even}}=\lim_{n\to\infty}[S_{2n+1}-S_{2n}]=0$$

所以這兩個子數列收斂於同一個值$S=S_{\text{odd}}=S_{\text{even}}$，而此值其實就是原來那個部分和數列$\{S_n\}$的極限值。因此上述的猜測就變成實實在在的一個定理：交錯調和級數是收斂的。

事實上，這些論證不僅告訴我們上面的猜測變成實實在在的一個定理，而且也提供了一般交錯級數如何收斂的模式。我們只需將交錯調和級數第n項$a_n=(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$中的$\dfrac{1}{n}$取代爲

$$\boxed{\text{極限值爲0的遞減正項數列}\ b_n}$$

即可。這就是所謂的交錯級數判別法，敘述如下：

【交錯級數判別法】　令b_n爲一遞減且極限值爲0的正項數列且令$a_n=(-1)^{n+1}b_n$，則交錯級數$\sum a_n$

$$b_1-b_2+b_3-b_4+b_5-b_6+-\cdots$$

是收斂的。其部分和數列$\{S_n\}$收斂方式分成兩道：一道由上往下，來自較大的奇數項所形成的子數列$\{S_{2n+1}\}$；而另一道則由下往上，來自較小的偶數項所形成的子數列$\{S_{2n}\}$，且兩道往同一目標奔跑。

[4]單調有界的實數列必收斂，此乃實數完全性眾多版本中的一個。所謂單調意指遞增或遞減，因而這個定理又可細分成爲：遞增有上界的實數列必收斂，遞減有下界的實數列必收斂。

4　交錯調和級數收斂於何處？

接著我們來計算交錯調和級數的和。如第一節中所說的，這需要兩個步驟；第一個步驟就得將部份和

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

理出一個公式來，這是一件非常不容易的事情。圖2所顯示的值約爲 $0.693\cdots$，下面我們用一個非常基本的方法來求出其確切的值；而此法也只適用於此處，很難推廣到其他的場合。若將 S_n 中的負號變爲正，那就變成調合級數的部份和

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\,;$$

這差不多是 n 的自然對數 $\ln n$，所以極限當然是 ∞。歐拉 (Euler) 很巧妙地將兩者一減，稱之爲 γ_n；所以我們有

$$\gamma_n = H_n - \ln n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

這就大有搞頭且好戲不斷囉。原先的兩個數列 H_n 與 $\ln n$ 都是嚴格遞增到 ∞ 的，相減之後又如何呢？且看相鄰兩項的差 $\gamma_{n+1} - \gamma_n$，化簡之得

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - [\ln(n+1) - \ln n] = \frac{1}{n+1} - \ln(1 + \frac{1}{n})\,;$$

這裡出現了兩位老兄：$\dfrac{1}{n+1}$ 與 $\ln(1+\dfrac{1}{n})$，到底誰大呢？簡單之至！這主要是因爲 $\ln(1+\dfrac{1}{n}) = \displaystyle\int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{x}\,dx$，所以這位老兄代表著函數圖形 $y = \dfrac{1}{x}$ 下方在區間 $[1, \dfrac{1}{n}]$ 所包圍區域 R 的面積。

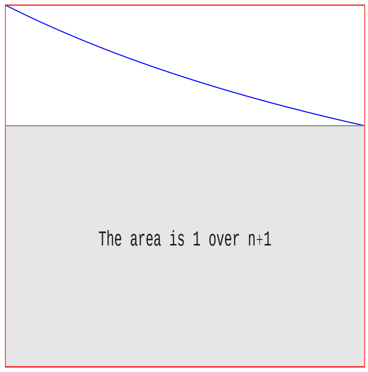

圖 4: 在區間 $[1, 1+\frac{1}{n}]$ 上，R(曲線至 x-軸所包圍的區域)，R_1 (灰色區)，及 R_2(上方水平線至 x-軸的長方形區域)之圖形。

令 R_1 與 R_2 分別爲上述區域 R 的內接(灰色區)與外接(上面那條水平線到 x-軸)長方形區域，則其共同邊長爲 $\frac{1}{n}$，而另一邊長分別爲 $\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ 與 1。故對應的面積分別就是 $\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{n+1}$ 與 $\frac{1}{n}\cdot 1=\frac{1}{n}$，當然 R 的面積 $\ln(1+\frac{1}{n})$ 就介於這兩個數之間。這就是所謂的「無言的證明」；因爲看看圖形，一切盡在不言中。

```
In[5]:= p4=Graphics[{{GrayLevel[0.9],Rectangle[{1,0},{1.5,1/1.5}]}}];
        p5=Plot[1/x,{x,1,1.5},PlotStyle->RGBColor[0,0,1]];
        p6=ListPlot[{{1,0},{1,1},{1.5,1},{1.5,0},{1,0}},
        PlotJoined->True,PlotStyle->RGBColor[1,0,0]]
        p7=Graphics[{{GrayLevel[0.5],Line[{{1,1/1.5},{1.5,1/1.5}}]},
           {RGBColor[1,0,0],Line[{{1,0},{1.5,0}}]}     }];
        p8=Graphics[{{GrayLevel[0.1],
        Text["The area is 1 over n+1",{1.25,.35}]}}];
        Show[{p4,p5,p6,p7,p8}]
```

故得不等式 $\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n})$，因而有

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \ln(1+\frac{1}{n}) < 0\text{；}$$

所以$\{\gamma_n\}$是一個遞減數列。另一方面我們有

$$\ln n = \int_1^n \frac{1}{t}\,dt = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{t}\,dt \le \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{k}\,dt = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\text{，}$$

因此$\gamma_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n > 0$，也就是說$0$為數列$\{\gamma_n\}$的一個下界。所以單調收斂定理告訴我們，此數列$\{\gamma_n\}$是收斂的。這個極限通常稱之為歐拉常數[5](Euler's constant)，以符號γ表示之：

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n)\text{。}$$

現在我們回到交錯調和級數的n項部份和S_n，可以感覺出來S_n與γ_n這兩個數列有很密切的關係。將γ_{2n}寫成

$$\gamma_{2n} = (1+\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3}+\frac{1}{4}) + \cdots + (\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}) - \ln(2n)\text{，}$$

其中第k個括弧為兩分數之和 $\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k}$；將此和與$\gamma_n$中的$\frac{1}{k}$對應，相減後可得 $\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}$。因此我們有

$$\gamma_{2n} - \gamma_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} - [\ln(2n) - \ln n]\text{；}$$

也就是說$\gamma_{2n} - \gamma_n = S_{2n} - \ln 2$，因而得知

$$S_{2n} = \gamma_{2n} - \gamma_n + \ln 2\text{。}$$

[5]歐拉常數γ的值大約是$0.577215664901532860606512090\cdots$，但此數究竟是有理數或無理數至今仍然還是一個謎，有待你去發掘、探討與研究。

兩邊取極限可得

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} \gamma_{2n} - \lim_{n\to\infty} \gamma_n + \ln 2 = \gamma - \gamma + \ln 2 = \ln 2。$$

這就是交錯調和級數的和，等於$\ln 2 \approx 0.69314718\cdots$；跟前面圖2所顯示的值是一致的。

參考文獻

[1] Bressoud, David M. : *A Radical Approach to Real Analysis*, MAA, Washington D.C., 1994.

[2] Clapham, Christopher: *A Concise Oxford Dictionary of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford/New York, 1990.

[3] Daintith, John/Nelson, R.D.: *The Penguin Dictionary of Mathematics*, Penguin Books Ltd., 1989.

[4] Rudin, Walter : *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd Edition, McGraw-Hill Book Co., New York, 1976.

[5] Wade, William R.: *An Introduction to Analysis*, Prentice Hall, New Jersey, 1995.

[6] 沈淵源,數論輕鬆遊,數學傳播第二十九卷第四期(116), 94年12月,第45－71頁。全文見網頁

`http://www.math.sinica.edu.tw/math_media/d294/29408.pdf`