

微積分【下】第三次考試

姓名：_____ 學號：_____ 分數：_____

♣♦♠♥ 注意：請將所有的過程詳細寫出來，共七大題每大題 20 分 ♣♦♠♥

1. 定義函數 f 如下：
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3 - x^3y}{x^2 + y^2} & \text{若 } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{若 } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) 試求 $f_x(x, y)$,

(b) 試求 $f_{xy}(0, 0)$ 。

(c) 試求 $f_y(x, y)$,

(d) 試求 $f_{yx}(0, 0)$ 。

2. 試求原點至曲面 $z^2 = x^2y + 4$ 的最小距離。(極小化距離的平方)

3. 定義函數 g 如下：

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{若 } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{若 } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

令 $\vec{u} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$ 為一單位向量。

(a) 請問函數 g 在原點是否連續？

(b) 試寫出函數 g 在點 (a, b) 沿著方向 \vec{u} 的方向導數 $D_{\vec{u}}g(a, b)$ 之定義。

(c) 試求函數 g 在原點沿著方向 \vec{u} 的方向導數 $D_{\vec{u}}g(0, 0)$ 。

(d) 請問函數 g 在原點是否可微分？

4. 令 $h(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$ 。試求出所有的臨界點，並利用第二階導數判別法將其分類為極大點、極小點或鞍點。

5. 若函數 f 在 \mathbb{R}^2 有連續的二階偏導數，且

$$f(0, 1) = 7, f_x(0, 1) = 11, f_y(0, 1) = -3, f_{xx}(0, 1) = 4, f_{xy}(0, 1) = -5, f_{yy}(0, 1) = 6.$$

若 $u(s, t) = f(s^2 - t^2, st)$ ，試求 $\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t}(1, 1)$ 。

(a) 試求 $\frac{\partial u}{\partial t}(1, 1)$ 。

(b) 試求 $\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t}(1, 1)$ 。

(c) 試求 $\frac{\partial u}{\partial s}(1, 1)$ 。

(d) 試求 $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s}(1, 1)$ 。

6. 試求與曲面 $z = x + y - x^2 - y^2$ 相切於點 $(1, 1, 0)$ 的切面方程式。

7. 人體表面積 S (以平方公尺為單位) 的公式可用體重 x (以公斤為單位) 與身高 y (以公分為單位) 來表示如下：

$$S = 0.007184x^{0.425}y^{0.725}$$

若測量體重的誤差百分比為 1% 而測量身高的誤差百分比為 2%，請問由此算出的人體表面積誤差百分比大約是多少？