微積分【上】期中考B

姓名：____________ 系級：______學號：______________ 分數：__________

♣♢♠♡　注意：請將所有的過程詳細寫出來　♣♢♠♡

1. 計算填充題：將計算過程寫在題目下方，再把答案填在格子內 (每小題8分共56分)

   (a) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{16x^2+7}}{3-4x}$ 之值爲

   (b) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 11}\frac{x(x-10)^7-11}{x-11}$ 之值爲

   (c) 令 $f(x)=\dfrac{\sin x}{(1-x)(2-x)(3-x)}$, 則導數 $f'(0)$ 之值爲

   (d) 函數 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$ 之圖形在點 $(0,1)$ 之切線方程式爲

(e) 函數 $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ 在 0 點之第一百零一階導數 $f^{(101)}(0)$ 爲 $\boxed{}$

(f) 用估計公式 [即微分量 (differential)] 來估計 $\sqrt[3]{1727.568}$ 之值爲 $\boxed{}$

(g) 函數 $f(x) = \sqrt{2x^3 - 6x}$ 在區間 $[-1.5, 0]$ 之絕對極大與絕對極小分別爲 $\boxed{}$

2. 考慮函數 $f(x) = \sqrt{2x^3 - 6x}$ 之圖形。(每格 4 分共 40 分)

(a) 其定義域爲 $\boxed{}$,

(b) 其第一階導數爲 $\boxed{}$,

(c) 其第二階導數爲 $\boxed{}$,

(d) 其臨界點爲 $\boxed{}$ ，

(e) 遞減區間爲 $\boxed{}$ ，

(f) 遞增區間爲 $\boxed{}$ ，

(g) 其反曲點爲 $\boxed{}$ ，

(h) 上彎區間爲 $\boxed{}$ ，

(i) 下彎區間爲 $\boxed{}$ 。

(j) 其圖形爲

3. 【定積分基本觀念】(共 $5+5+10$ 分)

定積分的觀念源自求面積的問題，以窮盡法解決之。令 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 爲一函數。將區間 $[a,b]$ 分割成 n 個子區間

$$[x_{j-1},x_j],\ j=1,2,3,\cdots,n,$$

用符號 $\mathcal{P}=\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\}$ 表示這些分割點所成的集合並稱之爲區間 $[a,b]$ 的一個分割。在每一個子區間上，選取一點 $x_j^*\in[x_{j-1},x_j]$, 並形成黎曼和 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} f(x_j^*)\Delta x_j$, 其中 Δx_j 爲子區間 $[x_{j-1},x_j]$ 之長度。定義分割 $\mathcal{P}$ 的大小爲 $|\mathcal{P}|=\max_{j=1}^{n}\{\Delta x_j\}$。若下列極限值存在

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{j=1}^{n} f(x_j^*)\Delta x_j,$$

則我們說函數 f 在區間 $[a,b]$ 上是可積分的，並將此極限值稱之爲函數 f 在區間 $[a,b]$ 上的定積分且以符號 $\int_a^b f(x)\,dx$ 表示之。在實際的計算當中，通常我們將區間 $[a,b]$ 分割成 n 等分，因而 $\Delta x_j=(b-a)/n\ \forall j$, 故得 $x_j=a+j\cdot\frac{b-a}{n}\quad\forall 1\le j\le n$ 。選取 $x_j^*=x_j$, 所要計算的極限值變成

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} f(a+j\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n}$$

若函數 $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\{\text{正實數}\}$, 則定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 之幾何意義爲函數圖形 $y=f(x)$ 下方在區間 $[a,b]$ 上之區域的面積。

(a) 定積分 $\displaystyle\int_{-4}^{0}\sqrt{16-x^2}\,dx$ 之值爲 $\boxed{}$

(b) 若函數 $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 擁有一個反導數 F, 則定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=$ $\boxed{}$

(c) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n+j}$ 之值爲 $\boxed{}$