

微積分【上】期中考 A

姓名：_____ 系級：_____ 學號：_____ 分數：_____

♣♦♠♥ 注意：請將所有的過程詳細寫出來，每小題10分；超過100，以100計。 ♣♦♠♥

1. 極限：

(a) 求 a 與 b 之值，使得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x} = 1$ 。

(b) 假設 $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = 4$ 且假設 $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = 2$ 。求極限 $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x)$ 之值。

(c) 計算極限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[8]{256+h}-2}{h}$ 之值。

(d) 計算極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$ 之值。

2. 連續：

(a) 求出所有的實數 a 之值，使得函數 f 處處連續，其中

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{若 } x \leq a \\ x^2 & \text{若 } x > a \end{cases}。$$

(b) 是否存在一實數，恰恰好比它的立方多1？

3. 導數：

(a) 令 $f(x) = \frac{x \cos x}{(1-x)(2-x)(3-x)(4-x)(5-x)(6-x)(7-x)}$ ，試求 $f'(0)$ 之值。

(b) 若已知 $\frac{d}{dx}(f(2x)) = x^2$ ，求 $f'(x)$ 。

(c) 若可微分函數 f 其相對極大值為 $f(7) = 11$ ，證明 $f'(7) = 0$ 。

4. 導數的應用：

(a) 求三次多項式函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，已知其相對極大值為 $f(-2) = 3$ 而相對極小值為 $f(0) = 1$ 。

(b) 試求方程式圖形 $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$ 在點 $(0, \frac{1}{2})$ 之切線方程式。

(c) 考慮有理函數 $f(x) = \frac{8x}{(x+2)^2}$ ，請用第一、二階導數來畫函數 f 之圖形並指出相關之點(極點,反曲點等)及有無漸近線。