

微積分 A 【上】 期末考試

姓名：_____ 學號：_____ 分數：_____

♣♦♠♥ 注意：請將所有的過程詳細寫出來，每小題 10 分 ♣♦♠♥

1. (a) 請敘述微積分基本定理 (Fundamental Theorem of Calculus)。

(b) 試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\sin \frac{\pi i}{n} \right) \frac{\pi}{n}$ 。

(c) 試求 $\frac{d}{dx} \int_0^{1+x^3} \frac{1 - \sqrt[3]{t-1}}{3\sqrt[3]{t-1}} dt$ 。

2. 試求下列各積分之值：

(a) $\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$

(b) $\int_0^1 \sin(\ln x) \, dx$

(c) $\int_0^{\infty} t e^{-t} \, dt$

3. 試求下列各不定積分：

$$(a) \int \frac{x^3}{x^2 + x - 2} dx$$

$$(b) \int x^3 \sqrt{4 - x^2} dx$$

$$(c) \int \frac{x^3}{(16 + x^2)^{3/2}} dx$$

4. 考慮函數 $f(x) = \frac{x^4 + 3}{6x}$, $x \in [1, 3]$ 。令 R 為函數圖形 $y = f(x)$ 下方所包圍的區域。

(a) 試求函數圖形 $y = f(x)$ 的長度。

(b) 將區域 R 繞 x -軸旋轉一圈所得之旋轉體，試求其體積。

(c) 將區域 R 繞 y -軸旋轉一圈所得之旋轉體，試求其體積。