從歐拉數鳥瞰微積分

沈淵源

摘要

對許多人而言，歐拉數e的身世如謎。此文就跟大家聊聊這個時時刻刻陪伴著數學家的歐拉數，並透過這個數對整部微積分有一個粗淺的鳥瞰。

歐拉數e是怎麼樣的一個數呢？歐拉數e差不多

$$2.71828182845904523536028747135266249775724709369995957 5\cdots$$

是個很漂亮的無理數。究竟漂亮到什麼程度呢？

首先，以此數爲底的指數函數e^x不僅是數學中非常重要，而且也是應用非常廣泛的一個函數；再加上他的微分(導函數)就是他自己，這又使這個函數變成一個極其單純而又簡便的函數，你還敢奢望有比這更簡單的公式嗎？

其次，這個數雖說不上是耳熟能詳；卻是跟我們日常生活息息相關。怎麼說呢？倘若有一個超級國際商業銀行，發行一種超級優惠定期存款帳戶；只要新客戶一開立此種存款戶頭，銀行就給予特級優惠年利率100%的利息。換句話說，你存進一百萬；若以單利計，一年後你戶頭的本利和就有2百萬。如此一來，若以連續複利計，那一年之後你戶頭的本利和就有e百萬！所以，歐拉數靜悄悄地躺臥在連續複利計本利和公式的青草地上；而我們竟視若無睹，真是有眼不識泰山。

爲了一睹歐拉數的風采，讓你見識見識泰山的雄偉；我們得先對微積分有個概念性的介紹，然後再從四個迥然不同的面向來理解這個數學

常數。當然，聰明的你會問：這四個迥然不同面向所介紹的數，會是同一個數嗎？我們將在最後一節詳加論證：這四個數的的確確同歸於e。

【動動手動動腦】 將本金P存入年利率100%的銀行帳戶裡：

1. 若複利一季結算一次，那麼一年後的本利和是多少？
2. 若複利一個月結算一次，那麼一年後的本利和是多少？
3. 若複利一年結算n次，那麼一年後的本利和是多少？
4. 連續複利意指$n \to \infty$，在此種情況下一年後的本利和是多少？

1 球體體積公式如何導

微積分是科學[1]研究的基礎，我們談如何以分析的方法研究變動中的事物；包括三大主題：微分法、積分法還有級數之收斂性。開宗明義，按歷史發展次序先介紹積分再介紹微分；當中穿插對歐拉數e的簡介，如此這般對微積分有一粗淺的鳥瞰。

我們先從大家所熟悉的球體談起。若球半徑爲r,其體積爲何？公式嗎，小學生都能倒背如流；我們在此分析，公式是怎麼推導出來的。首先，化空間爲平面：投影至赤道大圓或任何大圓的平面上，而原球體就是這個大圓盤繞其直徑旋轉半圈所得到的旋轉體；這又相當於於將大圓盤的一半，繞其直徑一圈所得到的旋轉體。其次，化平面爲直線：投影此半圓盤到直徑上，並將此直徑放在平面直角座標的x-軸上而圓心就是原點。如此一來，此半圓其實就是函數$y=\sqrt{r^2-x^2}$定義在區間$[-r,r]$上的圖形。面對有限區間，很自然地我們將其分割成更小的區間；通常我們喜歡等分，說是n等分好了，並稱呼這些分割點由小而大爲

$$-r = x_0\,, \quad x_1, \quad x_2\,, \quad \ldots\,, \quad x_n = r\ ;$$

[1]包含自然科學、管理科學、生命科學與社會科學

不難算出，這些分割點的座標爲

$$x_i = -r + i \cdot \frac{2r}{n}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n。$$

當 n 趨近於無限大，半圓下每一子區間 $[x_{i-1}, x_i]$ 所含蓋的區域可看成是細長的矩形區域或近乎一直線段。這些細長的矩形區域旋轉出來的旋轉體是什麼呢？乃是扁扁的直圓柱或銅板。第 i 個銅板的底半徑差不多是在 x_i 點半圓的函數值

$$\sqrt{r^2 - x_i^2} = \sqrt{r^2 - \left(-r + i \cdot \frac{2r}{n}\right)^2},$$

高則爲第 i 個子區間 $[x_{i-1}, x_i]$ 的長度 $\triangle x_i = \dfrac{2r}{n}$；因此第 i 個銅板的體積爲

$$\pi \left(\sqrt{r^2 - x_i^2}\right)^2 \triangle x_i = \pi \left(\sqrt{r^2 - \left(-r + i \cdot \frac{2r}{n}\right)^2}\right)^2 \cdot \frac{2r}{n} \tag{1}$$

化簡之後變成

$$\frac{8\pi r^3}{n} \left(\frac{i}{n} - \frac{i^2}{n^2}\right) \tag{2}$$

將所有這些體積加總起來，得到球體體積的近似值；再取極限之後，我們有：

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi(r^2 - x_i^2) \triangle x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{8\pi r^3}{n} \left(\frac{i}{n} - \frac{i^2}{n^2}\right)$$

眾所周知，

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \tag{4}$$

因而得到

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{8\pi r^3}{n}\left(\frac{i}{n}-\frac{i^2}{n^2}\right) &= 8\pi r^3\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i-\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2\right\} \\
&= 8\pi r^3\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n(n+1)}{2n^2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\right\} \\
&= 8\pi r^3\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n+1}{2n}-\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right\} \\
&= 8\pi r^3\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1+\frac{1}{n}}{2}-\frac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6}\right\} \\
&= 8\pi r^3\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{6}\right) \\
&= 8\pi r^3\cdot\frac{1}{6} \\
&= \frac{4}{3}\pi r^3,
\end{aligned}
$$

這就是球半徑爲r之球體的體積。

【動動手動動腦】 請確認將 (1) 式化簡後，的確是變成 (2) 式。

【動動手動動腦】 請問你怎麼得到 (3) 式及 (4) 式？

2 從球體體積到定積分

回想一下上面計算球體體積的論證過程包括有：

- 化繁爲簡：首先，化空間爲平面；其次，化平面爲直線。
- 分而治之：接著將一度空間極其簡單的直線段分割爲n等分，在每一子區間分析所要計算的對象並提出解決之道。當你回到二度空間的長條形區域，若以長方形代替；那麼回到三度空間時的實體變成扁直圓柱。

- 由已知求未知：因計算直圓柱體積已經有公式，將每一扁直圓柱體積算出，再加總這些扁直圓柱體積，得到球體體積的近似值。
- 取極限直搗黃龍：最後再取極限，得到所要的答案。

從分割區間 $[a,b]$ 爲 n 等份，並稱呼這些分割點由小而大爲

$$a = x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n = b\,;$$

接著在第 i 個子區間取右邊端點的函數值乘上第 i 個子區間 $[x_{i-1}, x_i]$ 長度 $f(x_i)\vartriangle x_i$； 最後加總所有這些乘積得到所謂的黎曼和[2]

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\vartriangle x_i\,;$$

再取極限得到：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\vartriangle x_i \text{ 。}$$

這整個過程就是函數 $\pi(r^2 - x^2)$ 在區間 $[-r, r]$ 上的定積分，以下列符號表示之：

$$\int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,dx$$

更一般來說，區間分割不見得要等分，我們要的是分割得很細；爲達此目的，我們僅須控制子區間的長度都很小即可。更具體的作法如下：令 $\mathcal{P} = \mathcal{P}([a,b])$ 爲那些由小而大的區間 $[a,b]$ 分割點

$$a = x_0\,, \quad x_1\,, \quad x_2\,, \quad \ldots\,, \quad x_n = b$$

所成的集合且令 $\vartriangle x_i$ 爲第 i 個子區間 $[x_{i-1}, x_i]$ 的長度。我們定義分割 $\mathcal{P}$ 的大小 $|\mathcal{P}|$ 爲

$$|\mathcal{P}| = \max\{\vartriangle x_1,\, \vartriangle x_2,\, \vartriangle x_3,\, \cdots,\, \vartriangle x_n\} \text{ 。}$$

[2]此積分觀念由數學家黎曼首先提出，所以就用他的名字來稱呼這個和，而對應的極限值則稱之爲黎曼積分。

另一方面，在第i個子區間$[x_{i-1}, x_i]$取右邊端點的函數值也可放寬爲其中任何一點$x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$的函數值。因此我們有更一般化的定義如下：

【定義】 令$f : [a, b] \to \mathbb{R}$爲一函數。若下列極限值

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

存在，我們就說函數f在區間$[a, b]$上是可積分的，並將此極限值稱之爲函數f在區間$[a, b]$上的定積分且以符號

$$\int_a^b f(x)\, dx \qquad \text{或} \qquad \int_a^b f \qquad \text{或} \qquad \int_{[a,b]} f$$

表示之[3]。

以上由計算球的體積，引導我們進入定積分的觀念，似乎有點不是那麼自然。現在我們回到函數f在區間$[a, b]$上黎曼和的極限值

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i \text{。}$$

若$f(x) \geq 0,\ x \in [a, b]$，那麼函數圖形躺臥在$x$-軸的上方；因而在$[a, b]$區間，圖形下方跟$x$-軸包圍著平面區域$R$。“望式生義”，我們有

- 稍稍分析黎曼和，不難看出，這就是平面區域R面積的近似值；
- 當你取極限$|\mathcal{P}| \to 0$，順理成章地得到平面區域R的面積。

因此若$f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$，則定積分$\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$之值其實就是函數圖形$y = f(x)$下方在區間$[a, b]$上之區域$R$的面積；這就是定積分的幾何意義，因而大部份介紹定積分都會從面積問題談起，實在不足爲奇。我

[3]符號中的x稱之爲積分變數，乃啞巴變數也；可用任何其他符號，如t, w等等代替之；因此，我們有$\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b f(w)\, dw$。

們特別從體積問題談起，主要是提醒大家：定積分不僅與二維空間平面區域的面積掛上鉤，也可以跟三維空間立體區域的體積有關係；實際上跟一維空間的曲線段長度，以及零維空間在區間 $[a, b]$ 上所有點之函數值的平均值也有關係。(這就是定積分最基本的四重應用：零維均函值，一維量長度，二維求面積，三維算體積)

【動動手動動腦】 根據定義，回答下列各問題：

1. 若 c 爲常數，證明 $\displaystyle\int_a^b c\,dx = c(b-a)$，因而常數函數是可積分的。
2. 將 $[0, 1]$ 分割成 n 等分，每一個子區間取右邊端點；請計算下列定積分之值：
$$\int_0^1 x\,dx\,, \qquad \int_0^1 x^2\,dx\,, \qquad \int_0^1 x^3\,dx\,.$$
3. 將 $[0, 1]$ 分割成 n 等分，每一個子區間取右邊端點；請問當你計算定積分 $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ 之時，會有什麼樣的困難呢？

【動動手動動腦】 根據定積分的幾何意義，請計算下列定積分之值：
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx\,, \qquad \int_{-2}^0 \sqrt{4-x^2}\,dx\,, \qquad \int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2}\,dx\,.$$

3　一看歐拉數

現在我們先從積分的觀點來介紹歐拉數，一個非常獨特的數學常數。可能會說不清，所以我們會一而再、再而三、三而四的介紹這個常數；在還沒證明這四個數是同一個數之前，我們暫且以符號 e_1, e_2, e_3, e_4 表示之。

令 $a > 1$。在區間 $[1, a]$，考慮倒數函數
$$y = \frac{1}{x}$$

圖形下方所包圍的區域。顯而易見，此區域的面積隨著a值的增大而增大。當這個區域剛剛好是一個單位面積時的那個唯一的a值，我們暫且以符號e_1表示之。換句話說，e_1就是那個唯一的正數使得定積分

$$\int_1^{e_1} \frac{1}{t}\,dt$$

之值爲1者。

這樣子的介紹雖然佔盡了視覺上的優勢，但問一個簡單無比的問題：此數e_1差不多是多少呢？

- 理所當然，e_1肯定比1大；
- 根據定義，e_1也會比2大；因爲在區間$[1,2]$倒數函數$y=\dfrac{1}{x}$圖形下方所包圍區域坐落在正方形$[1,2]\times[0,1]$裡面，故而得知。
- 然而，e_1比3大嗎？我們先將區間$[1,3]$分割成八等份，其分割點爲

  $$\{x_0=1\,,x_1=\frac{5}{4}\,,x_2=\frac{3}{2}\,,x_3=\frac{7}{4}\,,x_4=2\,,x_5=\frac{9}{4}\,,x_6=\frac{5}{2}\,,x_7=\frac{11}{4}\,,x_8=3\}$$

  在每個子區間$[x_{i-1},x_i],\quad i=1,2,3,\cdots,8$，考慮倒數函數$y=\dfrac{1}{x}$圖形下方所包圍區域的內接長方形

  $$[x_{i-1},x_i]\times[0,1/x_i]\,,\quad i=1,2,3,\cdots,8\text{ 。}$$

  顯而易見，在區間$[1,3]$倒數函數$y=\dfrac{1}{x}$圖形下方所包圍區域的面積大於這八個內接長方形面積之和

  $$\frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{3}+\frac{4}{7}+\frac{1}{2}+\frac{4}{9}+\frac{2}{5}+\frac{4}{11}+\frac{1}{3}\right)=\frac{28271}{27720}>1\text{ ；}$$

  所以可以確定的是$2<e_1<3$。

【動動手動動腦】 請將上面提到的內接長方形區域一一畫出。

【動動手動動腦】 依樣畫葫蘆，請問你可否估算e_1不大於2.8？

4 再看歐拉數

接著我們從微分的觀點再看歐拉數：觀察指數函數族

$$\{ f_a : x \mapsto a^x \mid a \geq 1 \}$$

的圖形。每一個指數函數f_a的圖形都經過點$(0,1)$。在此我們稍稍停頓一下，看看如何計算經過點$(0,1)$之切線斜率呢？僅僅一點$(0,1)$當然無法計算切線斜率，但你又不知道切線還會經過那一點；所以我們在函數$y = a^x$的圖形上任選一點(h, a^h)，然後得到經此二點$(0,1)$與(h, a^h)之割線斜率爲$\dfrac{a^h - 1}{h}$;再取極限〈割線變成切線〉

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h},$$

即得經過點$(0,1)$之切線斜率。顯而易見，經過此點之切線[4]的斜率與實數集合$[0, \infty)$之間有著一對一的對應關係存在；其中那使得經過點$(0,1)$之切線斜率[5]爲1的那個唯一正數a，我們暫且以符號e_2表示之；也就是說，e_2就是滿足下列等式

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$$

的那個唯一的底a。

道格拉斯・阿諾德(Douglas N. Arnold)寫了兩個動畫程式讓你感受並體會這個數，請拜訪他的網頁。網址爲：

`http://www.math.psu.edu/dna/graphics.html#exponential`

[4]從水平切線到近乎垂直切線

[5]水平切線與垂直切線的平分線，也就是夾角爲45°的切線

看完這兩個動畫，我們更是飽享視覺上的樂趣，但同樣難於估算其數值。雖然如此，切線斜率問題卻引導我們到另一個應用極廣的數學觀念，稱之爲導數或微分。

前面的定積分是函數在一個區間整體的行爲，而目前切線斜率則只是函數在某一點局部的行爲而已。我們先把問題一般化如下：令c爲實值實變數函數f之定義域的內點。當c變爲x，其對應的函數值從$f(c)$變爲$f(x)$；所以我們有兩個變化量：一個是函數值變化量

$$\triangle f = f(x) - f(c)\,,$$

另一個是變數變化量

$$\triangle x = x - c\,.$$

將此二變化量相除得到的差商，就是所謂的函數值之平均變化率

$$\frac{\triangle f}{\triangle x} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}\ ;$$

取極限$\triangle x \to 0$或$x \to c$之後，就變成在c點函數值之變化率

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f}{\triangle x} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}\ 。$$

這函數值之平均變化率以及在c點函數值之變化率，在不同學門中有其各自的涵義，譬如說：

- 在幾何學上，這分別就是割線斜率以及切線斜率；
- 在物理學上，這分別就是平均速度以及瞬時速度[6]；
- 在經濟學上，這分別就是平均成本(收入、利潤 $\cdots$)以及邊際成本(收入、利潤 $\cdots$)[7]。

[6]此時$f(x)$乃直線運動體在x時間的位置函數

[7]此時$f(x)$乃生產x產品之總成本(收入、利潤 $\cdots$)函數

大哉取極限$x \to c$之後！因爲這個概念太有用了，在數學裏有必要嚴肅以待，好好的把這概念研究一番；仿照定積分，我們在此寫下微分的定義。

【定義】 令c爲實值實變數函數f定義域的內點。若下列極限值

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f}{\triangle x} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

存在，我們就說函數f在c點是可微分的，並將此極限值稱之爲函數f在c點的導數且以符號

$$f'(c) \qquad \text{或} \qquad Df(c) \qquad \text{或} \qquad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=c}$$

表示之。

用這個符號，上面所介紹的常數e_2，可重述如下：滿足$f_a'(0) = 1$的那個唯一的正數a就是常數e_2。

【動動手動動腦】 考慮拋物線$y = x^2$，求經過點$(2, 4)$之切線方程式。

【動動手動動腦】 考慮指數函數$f_a(x) = a^x, \quad a > 0$；

1. 證明 $f_a'(x) = a^x f_a'(0)$；
2. 因而我們有 $De_2^x = e_2^x$。

5 三看歐拉數

接下來，我們從極限的觀點三看歐拉數：你若已經算出在前言末了【動動手動動腦】的第4題，答案應該就是

$$\lim_{n \to \infty} P\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n 。$$

P若用百萬帶入時，那麼前言第三段所說的e百萬，其實已經暗示著：歐拉數e就是底下數列的極限值

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty} \qquad 。$$

乍看之下，上面的數列好像是會趨近於1，因爲$1+\dfrac{1}{n}\to 1$而1的任何次方都是1。然而，你只消看看這個數列的前幾項就會改變此種似是而非的想法。且看：

$$n=1: \quad \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2.00$$

$$n=2: \quad \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2.25$$

$$n=3: \quad \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 \sim 2.37$$

$$n=4: \quad \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 \sim 2.44$$

首先，讓我們證明這個數列 $T_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$是遞增的。二項式定理告訴我們：$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{1}{n}\right)^j = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{1}{n^j}$，一項一項寫出即得

$$1+1+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-(n-1))}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}\ ;$$

將每一個分式中的n消掉後，寫成下列形式

$$T_n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\ 。$$

所以，下一項就是

$$\begin{aligned}T_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2\,!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3\,!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) \\ + \cdots + \frac{1}{n\,!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) \\ + \frac{1}{(n+1)\,!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\text{。}\end{aligned}$$

在上兩個展開式中：T_n包含有$n+1$項，而T_{n+1}則包含有$n+2$項；按序比較之，出現在T_n中的每一項都不大於出現在T_{n+1}中的每一個對應項，而且T_{n+1}還多出來最後一項正數；所以我們有

$$T_n \leq T_{n+1}\text{，}$$

這就證明了數列T_n是遞增的，因而其極限值絕對不可能會是1。問題是這個極限值可不可能是無限大呢？實際上，對所有的自然數n，不難證明數列T_n是有界的；更明確的說，我們必定有

$$T_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3\text{。}$$

此不等式的證明來自上面數列T_n的展開式：其中小括弧中的每一個數$1-\dfrac{i}{n}$都比1小$(1 \leq i \leq n-1)$，因此得到

$$\begin{aligned}T_n &= 1+1+\frac{1}{2\,!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n\,!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\\ &< 1+1+\frac{1}{2\,!}+\frac{1}{3\,!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n\,!}\\ &< 1+1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\ &< 1+\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^j\\ &= 1+1/(1-1/2)\\ &= 3\end{aligned}$$

到目前爲止，我們已經證明了數列T_n是遞增又有上界的。直覺強烈的提示我們，這樣子的數列應該會趨近於某個固定的實數；很幸運的，這次直覺終於勝利了；這就是所謂的單調收斂定理(Monotone Convergence Theorem, 可看成實數完全性的一個版本)。我們暫且以符號e_3來表示這個極限值，而用更大的n算出的T_n之值，當然就是e_3更好的近似值；且看下面的數據：

$$n = 10: \quad \left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} \sim 2.59374$$

$$n = 1000: \quad \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} \sim 2.71692$$

$$n = 100000: \quad \left(1+\frac{1}{100000}\right)^{100000} \sim 2.71827$$

$$n = 10000000: \quad \left(1+\frac{1}{10000000}\right)^{10000000} \sim 2.71828169$$

所以，這個遞增數列收斂的非常慢；當n取到千萬時，才精確到小數點後第六位。然而跟前面兩個比，那又是好得無比。

上面論證數列 $T_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 是有上界的過程，很明顯地分成兩段；而且也各有所用，說明如下(令 $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!}$)：

- 上半段說

$$T_n < \frac{1}{0\,!} + \frac{1}{1\,!} + \frac{1}{2\,!} + \frac{1}{3\,!} + \cdots + \frac{1}{n\,!} = S_n\,,$$

取極限$n \to \infty$即得

$$e_3 = \lim_{n\to\infty} T_n \le \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\,!}\,。$$

- 下半段說 $S_n < 3$，所以正項無窮級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\,!}$$

的部分和數列 $\{S_n\}$ 是有界的，因而單調收斂定理告訴我們這個部分和數列 $\{S_n\}$ 是收斂的；也就是說，無窮級數 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\,!}$ 的和存在。

然而，這個收斂的無窮級數之和究竟等於多少呢？目前只知道不小於極限值 e_3，也就是說

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\,!} \geq e_3 = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{5}$$

【動動手動動腦】 上面 (5) 式兩邊無窮級數和與極限值會不會相等呢？

6 四看歐拉數

最後，我們從級數的觀點四看歐拉數：我們用符號 e_4 表示下列無窮級數的和

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\,!} = \frac{1}{0\,!} + \frac{1}{1\,!} + \frac{1}{2\,!} + \frac{1}{3\,!} + \cdots \quad 。$$

上面我們已經證明了不等式 (5)，亦即

$$e_4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\,!} \geq e_3 \tag{6}$$

現在回到論證數列 $T_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ 是有上界之過程的第一個等式

$$T_n = 1 + 1 + \frac{1}{2\,!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n\,!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) 。$$

若$n \geq m$,則上式右側第m項爲

$$\frac{1}{m\,!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\ ;$$

因而我們有

$$T_n \geq 1+1+\frac{1}{2\,!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{m\,!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\ 。$$

固定m，然後取極限$n \to \infty$即得

$$e_3 \geq 1+1+\frac{1}{2\,!}+\frac{1}{3\,!}+\cdots+\frac{1}{m\,!}=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k\,!}=S_m\ ;$$

緊接著，再取極限$m \to \infty$我們有

$$e_3 \geq \lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k\,!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\,!}=e_4\ ;$$

與不等式(6)合體後，得到$e_4 = e_3$；也就是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\,!}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{7}$$

上面我們已經知道數列$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$非常緩慢地趨近其極限値$e_3$，那麼現在這個級數表示法又如何呢？且看：

$$n=10: \quad S_{10}=\sum_{k=0}^{10}\frac{1}{k\,!}\sim 2.71828\ 18011\ 46384\ 47972$$

$$n=22: \quad S_{22}=\sum_{k=0}^{22}\frac{1}{k\,!}\sim 2.71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 0247$$

當$n = 10$，級數表示法可精確到小數點後第七位、而$n = 22$，卻可精確到小數點後第22位。這遠比極限表示法好，而且好的太多了；因爲極

限表示法中的n大到一億時，說不定還無法精確到小數點後第七位。所以兩者之間的差距，真是不可以道里計。

實際上，估算第n項部分和 $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ 與級數和e_4之間的差距,是非常容易的。且看下面的不等式：

$$e_4 - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right) = \frac{1}{n! \cdot n}$$

所以我們有

$$e_4 - S_{10} < \frac{1}{10! \cdot 10} < 10^{-7},$$

以及

$$e_4 - S_{22} < \frac{1}{22! \cdot 22} < 10^{-22};$$

如上面的計算所顯示在我們眼前的。

7 積分學對抗微分學

以上，我們對歐拉數的簡介就好比帶著小學生走了一趟微積分戶外之旅；當中不見遊覽車更不見旅館或民宿，這其實是一趟道道地地的遠足，走路鳥瞰微積分最粗淺的層面。現在，我們就順勢更深入一層地思考：爲什麼不分開各別去學積分學與微分學呢？而硬要將兩者綁在一起，稱之微積分學呢？我們先回到各自的源頭，看看是否能瞄出一點點頭緒與端倪來。

算體積，窮盡法分而治之；先算近似值得某函數在某區間的黎曼和，取極限後得到所求，這就是函數在區間上的定積分。接著“望式生義”，當函數爲正值時，黎曼和之極限值有幾何意義：這個定積分就是函數圖形下方在區間上所包圍區域的面積。另一方面，算函數圖形經過某點之切線斜率；我們先算與其他點連線，即割線的斜率，當他點趨近某點時，割線斜率的極限值就是在某點的微分，此即切線之斜率也。

很顯然地，積分是函數在一個區間整體的行爲，而切線斜率則只是函數在某一點局部的行爲而已。所以感覺上，不管你是從整體與局部去比較、分析，或是從幾何意義去琢磨、思考；積分與微分這兩個觀念，徹徹底底、根根本本是風馬牛不相及的。不料，令人驚奇萬分、跌破眼鏡的是：這兩個觀念不僅僅有關係而且關係非常非常的密切。職是之故，貫穿其間關係的法則、公式，理所當然就稱之爲

「微積分基本定理」。

底下用兩種不同的方式來表達兩者之間的關係，其證明有待來日：

- 【微分形式】若 $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 爲一連續函數，則函數

  $$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \quad x \in [a, b]$$

  在每一個 $x \in (a, b)$ 都是可微分的，而且

  $$F'(x) = f(x) \text{。}$$

  換句話說，若 f 的積分是 F，則 F 的微分就是 f。口語的說，反應整體性質的積分是由反應局部性質的微分所決定。

- 【積分形式】若 F 在 $[a, b]$ 上是可微分的，而且 $F'(x) = f(x)$ 爲 $[a, b]$ 上的連續函數，則

  $$\int_a^x f(t)\, dt = F(x) - F(a) \text{。}$$

  換句話說，若 F 的微分是 f，則 f 的積分就是 F（或差一個常數）。口語的說，反應局部性質的微分是由反應整體性質的積分所決定。

因此積分學對抗微分學，何者勝出呢？通常，比賽的雙方總有一方得勝或是雙方平手；目前的情況似乎什麼都不是，更妥切的說算是互補吧。所以到底什麼是微積分呢？

- 可以確定當然不是“危機紛”，也不是字面上所看到的

$$\text{“微積分} = \text{微分} \oplus \text{積分”}$$

- 乃是

$$\text{微積分} = \text{微分} \oplus \text{積分} \oplus \text{微積分基本定理。}$$

8 四個數同歸於 e

最後，我們回到一開始所承諾要解答的問題：上面四個迴然不同面向所介紹的數，爲什麼會是同一個數呢？這意涵著：你可以採用其中任何一個當成歐拉數 e 的定義，然後證明其他三個都等於這個數，也就是由定義所推出來的三個性質。通常理工科微積分，從傳統以 e_2 爲定義；發展至今，大部分採用 e_1 爲定義。而其他非理工科微積分，則傾向採用 e_3 爲定義；其中的緣由，大概是數列給人的感覺比較實際、容易理解而且不太花時間，就可以推導出那個美妙無比的連續複利本利和公式。

下面我們採用第二個數 e_2 爲歐拉數的定義，所以 e_2 就是滿足下面等式的那個唯一正數：

$$\lim_{h\to 0}\frac{e_2^h-1}{h}=1 \tag{8}$$

然後證明第一個數 e_1 會等於 e_2；接著證明

$$e_3=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e_2\,,$$

因而 (7) 式告訴我們

$$e_4=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\,!}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e_2\text{ 。}$$

這就證明了以上四個數乃是相同的常數，所以把四個下標解除後，即得此四數同歸於 e。理所當然，我們就用歐拉姓氏的第一個字母 e 來表示

這個相同的數：

$$e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e\,,$$

且稱呼此數爲歐拉數。

底下，我們就照著所擬定好的步驟來進行。我們會用到上述微積分基本定理的積分形式、導數的連鎖法則、冪函數 x^a 導數的公式以及下述二定理 (所有這些定理、法則、公式，其證明皆有待來日)：

(D1) 若導數在某區間爲正，則函數在此區間爲遞增。

(D2) 可微分之 1-1 函數，其反函數也是可微分之 1-1 函數。

1. 先證明 $e_1 = e_2$：考慮以 e_2 爲底的指數函數 $E(x) = e_2^x$。根據定義 e_2 的 (8) 式，我們有

$$\begin{aligned} E'(x) &\xlongequal{\quad} \lim_{h\to 0} \frac{E(x+h)-E(x)}{h} \\ &\xlongequal{\quad} \lim_{h\to 0} \frac{e_2^{x+h}-e_2^x}{h} \\ &\xlongequal{\text{指數律}} \lim_{h\to 0} \frac{e_2^x e_2^h - e_2^x}{h} \\ &\xlongequal{\quad} e_2^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e_2^h - 1}{h} \\ &\xlongequal{(8)} e_2^x \cdot 1 = E(x) > 0\,; \end{aligned}$$

亦即，

$$E'(x) = E(x) \qquad \forall x \in (-\infty, \infty) \tag{9}$$

首先 (D1) 告訴我們，E 在區間 $(-\infty, \infty)$ 爲遞增，因而是 1-1 函數。因此其反函數 $F = E^{-1}$ 乃是定義在正實數上的實值函數

$$F : (0, \infty) \longrightarrow (-\infty, \infty)\,,$$

$$x \quad \longmapsto \quad y = F(x)$$

$$F(x) = y \iff E(y) = x \quad \forall x \in (0, \infty) \;\; \forall y \in (-\infty, \infty) \tag{10}$$

故得特殊值

$$E(0) = e_2^0 = 1 \iff F(1) = 0 \tag{11}$$

$$E(1) = e_2^1 = e_2 \iff F(e_2) = 1 \tag{12}$$

以及恆等式

$$E(F(x)) = x \qquad \forall x > 0 \tag{13}$$

其次(D2)告訴我們，F在區間$(0, \infty)$是可微分之1-1函數。從(13)式兩邊對x微分，連鎖法則得到

$$E'(F(x))F'(x) = 1 \overset{(9)}{\Longrightarrow} E(F(x))F'(x) = 1 \overset{(13)}{\Longrightarrow} xF'(x) = 1 \quad \forall\, x > 0 \text{ 。}$$

因此得到

$$F'(x) = \frac{1}{x} \qquad \forall\, x > 0 \tag{14}$$

因為 $f(x) = \dfrac{1}{x} = F'(x)$是$[1, \infty)$上的連續函數，採用【積分形式】版本的微積分基本定理得知

$$\int_1^x \frac{1}{t}\, dt = F(x) - F(1) \overset{(11)}{=\!=\!=} F(x) \tag{15}$$

所以在(15)中將x代入e_1時，我們有

$$F(e_1) = \int_1^{e_1} \frac{1}{t}\, dt \overset{e_1\text{之定義}}{=\!=\!=\!=} 1 \overset{(12)}{=\!=\!=} F(e_2)\,;$$

因F是1-1，故得證 $e_1 = e_2$ 。

2. 最後我們證明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e_2$。因爲上述反函數$F$就是對數函數，當然滿足下面的對數第三律：對任何常數a，我們有

$$F(x^a) = aF(x) \qquad \forall\, x > 0 \tag{16}$$

令 $h = \dfrac{1}{n}$，我們有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &== \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} \\
&\overset{(13)}{==} \lim_{h\to 0} E(F((1+h)^{\frac{1}{h}})) \\
&\overset{(16)}{==} \lim_{h\to 0} E(\frac{1}{h}F(1+h)) \\
&\overset{\text{連續性}}{==} E(\lim_{h\to 0}\frac{F(1+h)}{h}) \\
&\overset{(11)}{==} E(\lim_{h\to 0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}) \\
&\overset{\text{導數定義}}{==} E(F'(1)) \\
&\overset{(14)}{==} E(1) \\
&== e_2
\end{aligned}$$

總結以上所說，歐拉數e的四個面向乃微積分的一個縮影；不僅貫穿整部微積分學，從積分到微分、從極限到級數；又跟我們每一個人的日常生活，息息相關、寸步不離、如影隨形。歷代文人對竹子禮讚說：

「何可一日無此君！」；

現代數學家面對歐拉數e激情興奮地說：

「何可一日無此君！」。

且讓我們模仿蘇東坡的《於潛僧綠筠軒》，寫下對歐拉數e的禮讚：

「可使食無肉，不可居無e。無肉令人瘦，無e令人俗。」