用Mathematica對自然數次方和之探討

沈淵源

May 5, 2012

1 引言

請計算前一千個自然數的十次方和:

$$1^{10}+2^{10}+3^{10}+\cdots+1000^{10}$$

當你遇到這樣問題的時候,你會有怎麼樣的反應呢？可能你的第一個反應是期待Mathematica幫幫忙!那麼就讓我們趕快進入Mathematica的世界中吧。

MATHEMATICA 其指令如下:

```
Sum[a^10,{a,1,1000}]
```

十分之一秒鐘不到, Mathematica就告訴你答案是:

91409924241424243424241924242500

實在太美了,太令人興奮了!再來呢？可能你期待有個公式,免得每次要勞駕Mathematica。三百多年前Jacques Bernoulli (1654–1705)說他可以在半刻鐘之內算出這個和,你呢？除了上面兩個期待之外,還有其他的妙計嗎？

我們都很熟悉,前$k-1$個自然數的和、平方和、及其立方和之公式:

$$\begin{aligned}
1+2+3+\cdots+(k-1) &= \frac{1}{2}\,k^2-\frac{1}{2}\,k,\\
1^2+2^2+3^2+\cdots+(k-1)^2 &= \frac{1}{3}\,k^3-\frac{1}{2}\,k^2+\frac{1}{6}\,k,\\
1^3+2^3+3^3+\cdots+(k-1)^3 &= \frac{1}{4}\,k^4-\frac{1}{2}\,k^3+\frac{1}{4}\,k^2.
\end{aligned}$$

還記得當初你是怎麼導出這些公式的嗎？當你在國中的時候,不費吹灰之力的,就可以導出一次方和的公式。令

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1),$$

將此和之次序倒過來書寫,我們就有

$$S_1 = (k-1) + (k-2) + (k-3) + \cdots + 1,$$

再把這兩種寫法按序將對應項相加得到k,所以就有下面的等式

$$2S_1 = k + k + k + \cdots + k.$$

這裡共有$k-1$個k,因此S_1的公式馬上就在我們眼前。

怎麼樣把這個方法推廣到平方和呢?這下子你可就灰頭土臉的了。怎麼辦呢？山不轉,但路可以轉,所以人生的經歷告訴我們,是路轉的時候了。所謂路轉者也,就是方法要變囉。一次方來自兩個連續整數的平方差$\cdots$,

$$(j+1)^2 - j^2 = 2j + 1.$$

若將對應於$j = 0, 1, 2, \cdots, k-1$的k個等式相加,等式的左方對消之後只剩k^2,而等式的右方有兩倍的一次方和加上k個1。所以我們有

$$k^2 = 2[1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1)] + k \cdot 1,$$

整理後可得到

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1) = \frac{1}{2}\ k^2 - \frac{1}{2}\ k.$$

山路崎嶇,或許你會覺得太浪費時間,但這是確定可以抵達山頂的一個方法(當你搭上阿里山的登山鐵道時,必有同感)。如法泡製,我們可以處理平方和的問題:

$$(j+1)^3 - j^3 = 3j^2 + 3j + 1.$$

同樣地,將對應於$j = 0, 1, 2, \cdots, k-1$的k個等式相加,可得

$$k^3 = 3[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (k-1)^2] + 3[1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1)] + k \cdot 1,$$

代入前面一次方和的公式,化簡後,我們有

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(k-1)^2=\frac{1}{3}\;k^3-\frac{1}{2}\;k^2+\frac{1}{6}\;k.$$

重複此法,十次之後我們就可以得到$1^{10}+2^{10}+3^{10}+\cdots+(k-1)^{10}$的公式,令$k=1001$,即可得到結果.但不管你速度多快,也無法在半刻鐘之內完成,你還是輸給了Jacques Bernoulli。爲什麼呢？因爲我們的方法是登山鐵道的辦法,到第二階,得先經過第一階；是可以抵達山頂,但太不經濟了！是否真的如此呢？最後我們再作評論。

Jacques Bernoulli之所以與眾不同,在於他用分析的方法來解決代數的問題,他不搭火車而是搭直昇機! 他聲稱有唯一的一個首項係數爲1之n次多項式$B_n(x)$使得

$$1^n+2^n+3^n+\cdots+(k-1)^n=\int_0^k B_n(x)dx\ .$$

其實Jacques Bernoulli的慧眼,只需要微積分的知識與訓練就可具有的。還沒有作實驗之前,請先思考下面兩個問題：

(a) 可否設計一個實驗來證明你也可以當Jacques Bernoulli呢？

(b) 很自然的,上面所定義的這些多項式$B_n(x)$我們就稱爲Bernoulli多項式。你能用Mathematica設計一個實驗來計算這些多項式$B_n(x)$嗎?