第六講：階乘函數$n!$的最佳估算式

April 2, 2012

摘要

我們從上一個關於e的美妙不等式，輕易的就可以得到另一個更美的不等式爲$e(n^n e^{-n}) < n! < e(n^{n+1}e^{-n})$。透過實驗觀察$n!$與$n^{n+t}e^{-n}$之比值的漸近行爲($t$爲一介於0與1之間的常數)。當$t = \frac{1}{2}$時，圖形顯示此比值的極限爲一正實數$s \approx 2.5066\cdots$，因而在實驗上得到Stirling公式的確據。透過階乘函數的第三個界定，我們證明了Stirling公式是對的，同時也利用這個公式本身算出常數s原來就是$\sqrt{2\pi}$。

很自然的，我們可從這組不等式來估計$n!$的大小。當n增大時，$n!$很迅速的往無窮大趨近，亦即$n!$增大的速度非常非常快，而這個不等式告訴我們$n!$與$n^{n+t}e^{-n}$是差不多大或是它的一個常數倍，此處t爲一介於0與1之間的常數。從計算或應用的角度來說，處理$n^{n+t}e^{-n}$遠比處理$n!$來的容易。所以我們就來觀察一下，當n趨近於無窮大時，這兩個數的比值

$$S(n,t) = \frac{n!}{n^{n+t}e^{-n}}$$

是否會趨近於某一個定數呢？我們再一次的使用 Mathematica 來幫助我們探討這個問題。

1 實驗：觀察 $n!$ 與 $n^{n+t}e^{-n}$ 之比值的漸近行爲

(a) 首先將此比值改寫爲 $\dfrac{n!\,e^n}{n^{n+t}}$，並用符號 $S[n,t]$ 表示之。

```
In[1]:= S[n_,t_]:= n!E^n/n^(n+t)
```

(b) 先選定一個介於 0 與 1 之間的定值 t，然後觀察不同的 n 值對 $S[n,t]$ 的影響，當 n 越來越大，$S[n,t]$ 是否會趨近於某個定數？很自然的第一個想到要測試的 t 值乃是 0 與 1 的平均值 0.5，對較大的 n 值請列出 $S[n,0.5]$ 之值。

```
In[2]:= Table[{n,S[n,0.5]},{n,100,1000,100}]//MatrixForm
```

(c) 因爲我們所要觀察的是當 n 趨近於無窮大時 $S[n,0.5]$ 的極限值，所以更好更快的一個方法是用函數圖形來處理。請畫出 $S[n,0.5]$ 的圖形，$n \in [1,100000]$。

```
In[3]:= Plot[S[x,0.5],{x,1,10^5},
                PlotStyle->RGBColor[0,1,0]]
```

(d) 如上，請分析當 $t = 0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ \cdots,\ 0.9$ 其對應之數列

$$\{S(n,t)\}_{n=1}^{\infty}$$

圖 1: 函數 $S(x, 0.5)$ 之圖形 $(t = 0.5)$

的極限，用表列及圖示兩種方式來進行。

```
In[4]:= Table[S[n,t],{t,0,1,0.1},{n,1200,1280,10}]
                                     //N//ColumnForm
In[5]:= plob[t_]:=Plot[S[n,t],{n,1,10^5},
                        PlotStyle->RGBColor[1,0,0]]
        Show[{plob[.1],plob[.2],plob[.3],plob[.4]}]
In[6]:= plor[t_]:=Plot[S[n,t],{n,1,10^5},
                        PlotStyle->RGBColor[0,0,1]]
        Show[{plor[.6],plor[.7],plor[.8],plor[.9]}]
```

(e) 分析上面各種不同之 t 值所得的結果。

(f) 可再觀察並分析其他不同之 t 值所得的結果。

圖 2: 函數 $S(x, 0.1)$ 之圖形 $(t = 0.1)$

圖 3: 函數 $S(x, 0.2)$ 之圖形 $(t = 0.2)$

圖 4: 函數 $S(x, 0.3)$ 之圖形 $(t = 0.3)$

圖 5: 函數 $S(x, 0.4)$ 之圖形 $(t = 0.4)$

圖 6: 函數 $S(x, 0.6)$ 之圖形 $(t = 0.6)$

圖 7: 函數 $S(x, 0.7)$ 之圖形 $(t = 0.7)$

圖 8: 函數 $S(x, 0.8)$ 之圖形 $(t = 0.8)$

圖 9: 函數 $S(x, 0.9)$ 之圖形 $(t = 0.9)$

圖 10: 函數 $S(x, 0.1), \cdots, S(x, 0.4)$ 之圖形

圖 11: 函數 $S(x,0.6),\cdots,S(x,0.9)$ 之圖形

2 實驗結果的猜測

由上面的實驗 (請觀察圖1至圖9)，我們得到以下的猜測：

(a) 數列 $\{S(n,0.5)\}_{n=1}^{\infty}$ 爲一遞減且有界的數列。所以根據單調收斂定理 (Monotone Convergence Theorem)，我們知道這個數列是收斂的。令 s 爲其極限。圖1顯示 $s\approx 2.5066\cdots$，這個極限顯然不等於歐拉數 e。

(b) 如果 $t<0.5$，則數列 $\{S(n,t)\}_{n=1}^{\infty}$ 是遞增但無上界。所以我們不能指望這個數列會是收斂的。(請觀察圖 10)

(c) 如果 $t>0.5$，則數列 $\{S(n,t)\}_{n=1}^{\infty}$ 是遞減的而且其圖形有一水平漸近線，很顯然的就是 x-軸。(請觀察圖 11)

由此，可得到如下的猜測；我們用符號 $g(n)\sim f(n)$ 表示

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)}=1 \text{ 。}$$

【猜測一】對正整數 n，我們有 $n!\sim s\,n^{n+0.5}e^{-n}$，此處 s 爲一常數。

因爲$\Gamma(n+1)=n!$ 以及$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$，所以我們將猜測一改寫爲

【猜測二】對正數x，我們有$\Gamma(x)\sim sx^{x-0.5}e^{-x}$，此處$s$爲一常數。

如果這個猜測是對的，令

$$\mu(x)=\log\left(\frac{\Gamma(x)}{sx^{x-0.5}e^{-x}}\right),$$

則$\Gamma(x)=sx^{x-0.5}e^{-x}e^{\mu(x)}$。所以這個猜測建議我們考慮函數

$$f(x)=x^{x-0.5}e^{-x}e^{\mu(x)} \quad 。 \tag{1}$$

我們所面臨的問題變爲：尋找函數$\mu(x)$，使得f滿足界定三的條件。怎麼樣的$\mu(x)$才能使f是一個PG函數呢？且看：

$$\begin{aligned}
f(x+1)=xf(x) \quad &\Longleftrightarrow \quad 1=\frac{f(x+1)}{xf(x)}\\
&\Longleftrightarrow \quad 1=\frac{(x+1)^{x+0.5}e^{-x-1}e^{\mu(x+1)}}{xx^{x-0.5}e^{-x}e^{\mu(x)}}\\
&\Longleftrightarrow \quad e^{\mu(x)-\mu(x+1)}=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+0.5}e^{-1}\\
&\Longleftrightarrow \quad \mu(x)-\mu(x+1)=(x+0.5)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-1 \quad 。
\end{aligned}$$

令$g(x)=(x+0.5)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-1$。所以$f$是一個PG函數的充要條件爲$\mu(x)-\mu(x+1)=g(x)$。怎麼樣的$\mu(x)$才滿足這條件呢？很簡單，$\mu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}g(x+k)$就是其中一個。也許你會指控說：「你連級數的收斂性都還不知道，怎可如此大膽呢？」但萬事總有一個起頭嘛！忍耐一下，姑且假設它是收斂的。好啦！那這樣的μ是不是使得f滿足性質

(P) 呢? 我們先看看再說吧! 且看：

$$\begin{aligned} t_n(x) &= \frac{f(n+x)}{f(n)n^x} \\ &= \frac{(n+x)^{n+x-0.5}e^{-n-x}e^{\mu(n+x)}}{n^{n-0.5}e^{-n}e^{\mu(n)}n^x} \\ &= \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+x-0.5} e^{-x}e^{\mu(n+x)-\mu(n)} \quad 。\end{aligned}$$

我們知道

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+x-0.5} = e^x \quad 。$$

所以只要能證明 $\lim\limits_{n\to\infty} e^{\mu(n+x)-\mu(x)} = 1$，那麼性質 (P) 就沒問題。
事實上，

$$\mu(n+x)=\sum_{k=0}^{\infty} g(n+x+k)=\sum_{k=n}^{\infty} g(x+k), \qquad \mu(n)=\sum_{k=0}^{\infty} g(n+k)=\sum_{k=n}^{\infty} g(k)$$

都是上面那個無窮級數的尾巴。所以當 n 趨近於無窮大時，這兩個無窮級數當然都會趨近於 0。

現在我們回頭討論上面那個無窮級數 $\sum_{k=0}^{\infty} g(x+k)$ 的收斂性。首先我們將 g 寫成下面的形式：

$$g(x) = \frac{1}{2}(2x+1)\log\left(\frac{1+\frac{1}{2x+1}}{1-\frac{1}{2x+1}}\right) - 1 \quad 。 \tag{2}$$

令$y=\frac{1}{2x+1}$，則$0<y<1$，此乃因爲$x>0$。眾所皆知，

$$\begin{aligned}\log(1+y) &= +y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+-\cdots\\ \log(1-y) &= -y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}--\cdots\end{aligned}$$

所以，我們有下面的展開式

$$\frac{1}{2}y^{-1}\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right)=1+\frac{y^2}{3}+\frac{y^4}{5}+\frac{y^6}{7}+\cdots\ 。$$

回到上面的(2)式，我們得到

$$\begin{aligned}g(x) &= \frac{1}{3(2x+1)^2}+\frac{1}{5(2x+1)^4}+\frac{1}{7(2x+1)^6}+\cdots\\ &< \frac{1}{3(2x+1)^2}\left[1+\frac{1}{(2x+1)^2}+\frac{1}{(2x+1)^4}+\cdots\right]\\ &= \frac{1}{3(2x+1)^2}\frac{1}{1-(\frac{1}{2x+1})^2}\\ &= \frac{1}{12x}-\frac{1}{12(x+1)}\ 。\end{aligned}$$

因此，我們有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}g(x+k) &< \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{12(x+k)}-\frac{1}{12(x+k+1)}\right)\\ &= \frac{1}{12x}-\frac{1}{12(x+n+1)}\\ &< \frac{1}{12x}\ 。\end{aligned}$$

所以我們的無窮級數$\sum_{k=0}^{\infty}g(x+k)$是正項級數，而且其部份和是有上限的。結論是它是收斂的，所以我們得到

$$\lim_{x\to\infty}\mu(x)=0\quad 亦即\quad \lim_{x\to\infty}e^{\mu(x)}=1\ 。$$

界定三告訴我們$f(x)=c\Gamma(x)$，或者寫成下式

$$\Gamma(x)=sx^{x-0.5}e^{-x}e^{\mu(x)}\ ,$$

此處$s=1/c=1/f(1)$爲一常數。這就證明了猜測三是對的，此即一般所謂的Stirling [1]公式。因此我們就把這個常數s稱之爲Stirling常數。

最後，讓我們將上面所得到的結果用來解開Stirling常數的廬山真面目，做爲這一章的結束。我們會用到$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$，第(??)式，以及上面剛得到的結果$n!\sim sn^{n+0.5}e^{-n}$。且看：

$$\begin{aligned}
\Gamma(\frac{1}{2}) &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^{0.5}n!}{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\cdots\frac{2n+1}{2}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}(n!)^2n^{0.5}}{(2n)!(2n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}s^2n^{2n+1}e^{-2n}n^{0.5}}{s(2n)^{2n+0.5}e^{-2n}(2n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{s(2n)}{\sqrt{2}(2n+1)}\ 。
\end{aligned}$$

所以我們有等式$\sqrt{\pi}=s/\sqrt{2}$，因此可得

$$s=\sqrt{2\pi},$$

[1]史特林 James Stirling (1692–1770) 是來自牛頓學校的英國數學家。此公式實際上在更早的年代已由 Abraham De Moivre (1667–1754) 所建立。

這就是Stirling常數。

參考文獻

[1] Abell, Martha L. and Braselton, James P. :*Mathematica by Example*, 2nd Edition, Academic Press, San Diego, 1997.

[2] Blachman, Nancy R. : *Mathematica: A Practical Approach*, Prentice Hall, New Jersey, 1992.

[3] Clapham, Christopher: *A Concise Oxford Dictionary of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford/New York, 1990.

[4] Daintith, John/Nelson, R.D.: *The Penguin Dictionary of Mathematics*, Penguin Books Ltd., 1989.

[5] Gaylord, Richard J./Kamin, Samuel N./Wellin, Paul R. : *Introduction to Programming with Mathematica*, 1st Edition, Springer-Verlag New York, Inc., 1993.

[6] Nelsen, Roger B.: *Proofs Without Words* , MAA, Wahington D.C., 2000.

[7] 沈淵源，從尤拉數e到Stirling常數，數學傳播第二十卷第一期(77)，85年3月，第34–45頁。

`http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_20_1_03/index.html`

[8] 蔡聰明，《數學的發現趣談》，三民書局出版，90年2月。

[9] Wolfram, Stephen: *The* MATHEMATICA *Book*, 3rd Edition, Version 3, Wolfram Media/Cambridge University Press, 1996.