第五講：階乘函數$n!$面面觀

March 26, 2012

摘要

我們從上一章那個關於e的不等式，輕易的就可以得到另一個更美的不等式爲$e(n^n e^{-n}) < n! < e(n^{n+1}e^{-n})$。透過實驗觀察$n!$與$n^{n+t}e^{-n}$之比值的漸近行爲($t$爲一介於0與1之間的常數)。當$t=\frac{1}{2}$時，圖形顯示此比值的極限爲一正實數$s \approx 2.5066\cdots$，因而在實驗上得到Stirling公式的確據。透過階乘函數的第三個界定，我們證明了Stirling公式是對的，同時也利用這個公式本身算出常數s原來就是$\sqrt{2\pi}$。

1 一個更美的不等式

在第一章中，我們從歐拉數e談起，結束在與e有關的一個非常重要的不等式上，亦即

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e < \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}。$$

其實這個不等式本身也是挺有趣的，我們先寫成下面的形式：

$$\frac{(k+1)^k}{k^k} < e < \frac{(k+1)^{k+1}}{k^{k+1}}$$

然後將對應於k從1到$n-1$的$n-1$個不等式相乘在一起，左式爲

$$\frac{2^1}{1^1} \times \frac{3^2}{2^2} \times \frac{4^3}{3^3} \times \frac{5^4}{4^4} \times \cdots \times \frac{(n-1)^{n-2}}{(n-2)^{n-2}} \times \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}},$$

而右式則變成

$$\frac{2^2}{1^2} \times \frac{3^3}{2^3} \times \frac{4^4}{3^4} \times \frac{5^5}{4^5} \cdots cdots \times \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-2)^{n-1}} \times \frac{n^n}{(n-1)^n} \quad 。$$

化簡後可得不等式：

$$\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} < e^{n-1} < \frac{n^n}{(n-1)!}$$

$$\iff \quad \frac{n^n}{n!} < \frac{e^n}{e} < \frac{n^{n+1}}{n!}$$

$$\iff \quad e\left(n^n e^{-n}\right) < n! < e\left(n^{n+1} e^{-n}\right)$$

很自然的，我們可從這組不等式來估計$n!$的大小。當n增大時，$n!$很迅速的往無窮大趨近，亦即$n!$增大的速度非常非常快，而這個不等式告訴我們

聰明的你說:____

2 引進階乘函數 $\Gamma(x)$

在初等微積分中，我們處理過無限積分，像 $\int_0^\infty e^{-t}dt$，$\int_0^\infty te^{-t}dt$，$\int_0^\infty t^2e^{-t}dt$，$\cdots$等。由數學歸納法，我們有

$$\int_0^\infty t^n e^{-t}dt = n! \text{ 。}$$

這個 $n!$ 的積分表示法建議我們考慮無限積分 $\int_0^\infty t^x e^{-t}dt$，於是階乘函數的研究之旅就此展開。傳統上，我們習慣定義階乘函數為

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \text{ 。}$$

眾所周知，階乘函數 $\Gamma(x)$ 爲定義在 $(0,\infty)$ 的正函數而且滿足函數方程式 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ 以及起始條件 $\Gamma(1) = 1$。然而，僅僅這兩個性質還是無法界定階乘函數。我們很容易看出，起始條件在整個界定上是無關緊要的。因爲如果 $f(x)$ 是定義在 $(0,\infty)$ 的正函數且滿足函數方程式 $f(x+1) = xf(x)$，則 $g(x) = f(x)/f(1)$ 也是定義在 $(0,\infty)$ 的正函數，滿足同一函數方程式而且 $g(1) = 1$。令人驚訝的是，$\log\Gamma(x)$ 函數的凸性就足以界定階乘函數。這是由 H. Bohr 與 J. Mollerup 所發現的事實，詳情請參閱 [5]。換句話說，上述兩性質加上 $\log\Gamma(x)$ 函數的凸性就可以界定階乘函數。其證明可參閱 Emil Artin [1] 漂亮的小書 [3, 4] 或是 Walter Rudin 的名作 [35]。

[1]阿丁 Emil Artin (1898-1962) 德國數學家。陳省身在學算四十年 [10] 一文中說到：「漢大數學教授除布拉希克 (Blaschke) 外，尚有阿丁 (Artin)、Hecke 二人，其中尤以阿丁氏最爲特出。他是近代抽象代數開創者之一。但他的興趣及於整個數學。他的演講與論文，都是組織嚴密，曲折不窮。難懂的理論，經他整理，都變成自然。他二十多歲即任正教授，爲人隨和，看起來像學生。」

第二個界定階乘函數的公式乃是由 Laugwitz 及 Rodewald[28] 所提出。他們說, $\log\Gamma(x)$ 函數的凸性可取代爲性質 (L)：

$$L(n+x) = L(n) + x\log(n+1) + r_n(x), \text{此處} L(x) = \log\Gamma(x+1), \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0 \text{。}$$

然而，他們並沒有證明性質 (L) 與 $\log\Gamma(x)$ 函數的凸性之間是怎麼個連結起來而且等價的問題。這個界定階乘函數的概念可追溯到歐拉，請參閱 [17]。

如果仔細分析一下性質 (L), 我們馬上會察覺到自然對數的引進與否，無關緊要。沒有的話，上面的式子和變成積，反而更簡捷且更接近階乘函數的積的表示法。基於此種考慮，我們可得到下面的性質，稱之爲性質 (P)：

$$\Gamma(x+n) = \Gamma(n)n^x t_n(x), \text{ 此處 } \lim_{n\to\infty} t_n(x) = 1 \text{。}$$

如上所期望，這給了我們第三個界定階乘函數的公式。

【定理】存在唯一定義於 $(0,\infty)$ 的正函數 $f(x)$ 滿足下列三個性質：

(a) $f(1) = 1$；

(b) $f(x+1) = xf(x)$；

(c) $f(x+n) = f(n)n^x t_n(x)$， 此處 $\lim_{n\to\infty} t_n(x) = 1$。

詳細的證明請參閱 [37], 在此我們來看看唯一性的證明。

【引理】對任何的正數 $x>0$，函數數列 $\{f_n(x)\}$ 是收斂的，此處

$$f_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \text{。}$$

【證明】取對數，可得

$$\begin{aligned}
\log f_n(x) &= x\log n + \sum_{k=1}^{n}\log k - \log x - \sum_{k=1}^{n}\log(x+k) \\
&= x\log n - \log x - \sum_{k=1}^{n}\log(1+\frac{x}{k}) \\
&= -\log x - x\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right] + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{x}{k} - \log(1+\frac{x}{k})\right] \\
&= -\log x - x\gamma_n + c_n(x)\ ,
\end{aligned}$$

此處 $\gamma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n$，還有 $c_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{x}{k} - \log(1+\frac{x}{k})\right]$。眾所周知，數列 $\{\gamma_n\}$ 收斂於歐拉常數 $\gamma \approx 0.577215664902\cdots$。對 $k > x > 0$，我們有

$$0 < \frac{x}{k} - \log(1+\frac{x}{k}) = \frac{x}{k} - \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{i}(\frac{x}{k})^i \le \frac{x^2}{2k^2}\quad。$$

比較法告訴我們，數列 $\{c_n(x)\}$ 是收斂的，所以 $\{\log f_n(x)\}$ 是收斂的，因此原來的數列 $\{f_n(x)\}$ 也是收斂的。

```
In[7]:= N[EulerGamma,12] Out[7]= 0.577215664902
```

【定理唯一性的證明】若函數 f 滿足定理中所述的三個性質，則從性質 (a) 與性質 (b) 可得

$$f(n) = (n-1)!\ , \tag{1}$$

$$f(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)xf(x)\quad。 \tag{2}$$

將 (2) 式，性質 (c)，以及 (1) 式合在一起，我們有

$$f(x) = \frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\cdot t_n(x) = f_n(x)\cdot s_n(x),$$

此處 $s_n(x)=\dfrac{x+n}{n}\cdot t_n(x)$，而 f_n 則爲引理中的那個函數。由性質 (c) 得知 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)=1$，所以我們有下面的公式：

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \text{ 。} \tag{3}$$

因此可得結論，$f(x)$ 是唯一的。

爲了討論上的方便，我們採用下面的術語。

【定義】我們稱一個定義於 $(0,\infty)$ 的正函數 f 爲 PG (pre-gamma) 函數，如果 f 滿足函數方程式 $f(x+1)=xf(x)$。

現在我們可以重述到目前爲止階乘函數的界定方法，如下：

【界定一】若 f 爲一滿足性質 (C) 的 PG 函數

$$\log f \text{ 爲區間 } (0,\infty) \text{ 上的凸函數，} \tag{C}$$

則 $f(x)=c\Gamma(x)$，此處 c 爲一常數。

【界定二】若 f 爲一滿足性質 (L) 的 PG 函數 ($L(x)=\log f(x+1)$)

$$L(n+x)=L(n)+x\log(n+1)+r_n(x) \text{ 且 } \lim_{n\to\infty} r_n(x)=0, \tag{L}$$

則 $f(x)=c\Gamma(x)$，此處 c 爲一常數。

【界定三】若 f 爲一滿足性質 (P) 的 PG 函數

$$f(n+x)=f(n)n^x t_n(x) \text{ 且 } \lim_{n\to\infty} t_n(x)=1, \tag{P}$$

則 $f(x)=c\Gamma(x)$，此處 c 爲一常數。

顯而易見的，在這三個不同的界定當中，常數 c 均爲 $f(1)$。換句話說，任何PG函數 f 具有 $f(1)=1$ 且滿足性質(C)，或性質(L)，或性質(P)的，必定就是階乘函數。

事實上，對一個PG函數而言，性質(C)，性質(L)，性質(P)是等價的;詳細的證明請參閱[37]。所以前面證明唯一性時，在引理中的那個函數（亦即(3)式）就是階乘函數本身。

參考文獻

[1] Abell, Martha L./Braselton, James P.: *Mathematica by Example*, Second Edition, Academic Press, San Diego, 1997.

[2] Apostol, Tom M.: *Introduction to Analytic Number Theory*, Undergraduate Texts of Mathematics, Springer-Verlag, New York, First Edition, 1976, Corr. Fifth Printing, 1998.

[3] Artin, Emil : *The Gamma Function*, Holt, Rinehart & Winston, Inc., New York, 1964.

[4] Artin, Emil : Einführung in die Theorie der Gammafunktion, Teubner, 1931.

[5] Bohr, H./Mollerup, J. : *Laerebog i matematisk Analyse*, Kopenhagen, 1922, vol. III, pp. 149-164.

[6] Borwein, J.M./Borwein, P.B., Ramanujan and pi, *Scientific American* 258(2) (1988), 66-73. (中譯見數播第十三卷第二期)

http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_20_1_03/index.html

[7] Bressoud, David M. : *A Radical Approach to Real Analysis*,MAA, Washington D.C., 1994.

[8] Bressoud, D. M.: *Factorization and Primality Testing*, Undergraduate Texts of Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1989.

[9] CAS網頁 http://www.rbjones.com/rbjpub/cs/ai031.htm#introduction

[10] 陳省身，學算四十年，傳記文學第五卷第五期, 55年5月。

[11] Clapham, Christopher: *A Concise Oxford Dictionary of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford/New York, 1990.

[12] Daintith, John/Nelson, R.D.: *The Penguin Dictionary of Mathematics*, Penguin Books Ltd., 1989.

[13] Itô, Kiyosi (Editor): *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*, 2nd ed., by the Mathematical Society of Japan, The MIT Press, Cambridge, Massachusettes, and London, England 1987.

[14] 余文卿，關於圓周率π,數學傳播第十三卷第三期(51), 78年9月。
http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_13_3_05/index.html

[15] 余文卿，級數求和法，數學傳播第十五卷第四期(60), 80年12月。
http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_15_4_14/index.html

[16] 余文卿，一些發散級數的求和法，數學傳播第二十二卷第四期(88), 87年12月，第43-49頁。
http://www.math.sinica.edu.tw/math_media/vol.phtml?voln=224

[17] Euler, Leonhard : *Institutiones calculi differentialis*, Teubner, 1980; Leonhardi Euleri opera omnia, 10.

[18] Gaylord, Richard J./Kamin, Samuel N./Wellin, Paul R.:*Introduction to Programming with Mathematica*, Springer-Verlag, New York, Second Edition, 1996.

[19] Hardy, G.H.: A Course of Pure Mathematics Cambridge Mathematical Library, 1993 (First published in 1908).

[20] Hardy, G.H.: *A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press, London, 1940. 摘要見網頁
http://en.wikipedia.org/wiki/A_Mathematician%27s_Apology

[21] 洪維恩：數學運算大師Mathematica 4, 基峰資訊, 2001年5月。

[22] 洪萬生，中國 π 的一頁滄桑，科學月刊第八卷第五期, 1977年5月。
http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_08_05_3/index.html

[23] 侯源安：代數學(含編碼學)，東華書局印行, 1996年。

[24] 華羅庚：數論導引，北京科學出版社, 1957年。

[25] Ireland, Kenneth F./Rosen, Michael I.: *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, Volume 84 of *Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag, New York, Second Edition, 1990, Corr. Fifth Printing, 1998.

[26] Knuth, D.: The Art of Computer Programming, Vol. 2, Semi-Numerical Algorithms, Reading, MA: Addition-Wesley, 1969.

[27] Knuth, D.: The Art of Computer Programming, Vol. 3, Sorting and Searching, Reading, MA: Addition-Wesley, 1973.

[28] Laugwitz, Detlef and Rodewald, Bernd : A simple characterization of the gamma function, *Amer. Math. Monthly*, 94 (1987), 534-536.

[29] 莫宗堅：韓信點兵，科學月刊第一卷第一期, 1970年1月。全文見網頁 `http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_01_01_2/`

[30] Nelsen, Roger B.: *Proofs Without Words* , MAA, Wahington D.C., 2000.

[31] Niven, Ivan/Zuckerman, Herbert S./Montgomery, Hugh L.: *An Introduction to the Ttheory of Numbers*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1991.

[32] 質數網頁 http://www.utm.edu/research/primes/largest.html

[33] Riemann (譯者張海潮、李文肇), Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen (論幾何學之基礎假說), 1845, 數學傳播第十四卷第三期, 79年9月。

[34] Rosen, Kenneth H.:*Elementary Number Theory and Its Applications*, Addison-Wesley, Fifth Edition, 2005.

[35] Rudin, Walter : *Principles of Mathematical Analysis*, Third Edition, McGraw-Hill Book Co., New York, 1976.

[36] Schroeder, M.R.: *Number Theory in Science and Communication*, Springer-Verlag, Third Edition, 1997, Corr. Second Pprinting, 1999.

[37] Shen, Yuan-Yuan : On Characterizations of the Gamma Function, *Math. Mag.*, Vol. 68, No. 4, October 1995, 301-305.

[38] 沈淵源，從尤拉數e到Stirling常數，東海學報第三十六卷, 84年7月，第79-96頁。

[39] 沈淵源，用Mathematica對自然數次方和之探討，東海科學第二卷, 89年7月，第55-68頁。

[40] 沈淵源，從尤拉數e到Stirling常數，數學傳播第二十卷第一期(77), 85年3月，第34-45頁。
`http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_20_1_03/index.html`

[41] 沈淵源，登阿里山— 搭小火車或是直昇機？數學傳播第二十五卷第二期(98), 90年6月，第78-87頁。
`http://www.math.sinica.edu.tw/math_media/vol.phtml?voln=252`

[42] Silverman, Joseph H./Tate, John: *Rational Points on Elliptic Curves*, Undergraduate Texts in Math., Springer-Verlag, New York, 1992.

[43] Silverman, Joseph H.: *A Friendly Introduction to Number Theory*, Prentice Hall, Third Edition, 2006.

[44] Sun-Tsu(孫子)：孫子算經，收入《宋刻算經六種》,上海文物出版社, 1980年。

[45] 蔡聰明，瓦里斯公式及其相關的結果，科學月刊第二十七卷第五期, 1996年5月。

http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_27_05_1/index.html

[46] 蔡聰明，圓與 π ,科學月刊第二十七卷第六期, 1996年6月。

http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_27_06_1/index.html

[47] 蔡聰明，《數學的發現趣談》，三民書局出版, 90年2月。

[48] 曹宏熙譯，雷馬紐冉(Ramanujan)和π,數學傳播第十三卷第二期(50), 78年6月，第70-79頁。

[49] Wade, William R.: *An Introduction to Analysis*, Prentice Hall, New Jersey, 1995.

[50] 華理斯的生平事蹟，詳細計再請見 The MacTutor History of Mathematics archive 之網站，其網址爲：http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/Mathematicians/Wallis.html

[51] Washington, L.: *Introduction to Cyclotomic Fields*, 2nd ed., Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, New York, 1997.

[52] Wolfram, Stephen: *The Mathematica Book*, Fifth Edition, Version 5, Wolfram Media, 2003.

[53] Wolfram介紹網頁

http://www.wolfram.com/products/mathematica/introduction.html

[54] Wright, Ernest Vincent: Gadsby, A Story of Over 50,000 Words Without Using the Letter“E”, 1937. http://spinelessbooks.org/gadsby/

[55] 余家銘：MATHEMATICA程式設計風格與應用，文魁資訊出版社，2002年7月。

[56] 于　靖, Zeta函數與超越不變量，數學傳播第二十四卷第一期(93), 89年3月，第9-16頁。

`http://www.math.sinica.edu.tw/math_media/vol.phtml?voln=241`