第二講：估算歐拉數e

March 3, 2012

1 引言：歐拉數e何許數也？

歐拉數e到底是何方神聖？值得我們體驗完實驗的工具之後就馬上提到她的大名，並進而要認識她、介紹她且要估算她。

在Mathematica中，我們用大寫的E來表示歐拉數e，而且可任由你來選擇其精確度。譬如，你要看到歐拉數精確到五十五位數，則可輸入指令N[E,55]，得到結果如下：

```
In[1]:=N[E,55]
Out[1]=2.718281828459045235360287471352662497757247093699959575
```

歐拉數e是個很漂亮的無理數。究竟漂亮到什麼程度呢？首先，以此爲底的指數函數e^x是數學中非常重要，應用也非常廣泛的一個函數；而其導數就是它自己，這又使得此函數e^x變成一個極其單純簡便的函數，你

還能要求比這更簡單的公式嗎？其次，我們至少可以從四個方面來理解這個數：

(a) 從微分的觀點：觀察指數函數族 $\{\ a^x \mid a > 0\ \}$ 的圖形。每一函數圖形都會經過點 $(0,1)$，而經過這一點的切線斜率與實數之間有一對一的對應關係；其中那使得過 $(0,1)$ 之切線斜率爲 1 的唯一正數 a，我們用 e 來表示。Douglas N. Arnold 對此有一 Mathematica 的動畫程式，請拜訪他的網頁。其網址爲：
`http://www.math.psu.edu/dna/graphics.html#exponential`

(b) 從積分的觀點：令 $a > 1$。在區間 $[1, a]$，考慮函數 $y = 1/x$ 圖形下方所包圍的區域。顯而易見，此區域的面積隨著 a 的增大而增大。當這個面積剛好是一個單位時的那個唯一的正數 a，我們就定義此數爲 e。換句話說，e 就是那個唯一的正數使得定積分 $\int_1^e \frac{1}{t}\,dt$ 之值爲 1 者。

(c) 從極限的觀點：我們可以定義 e 爲底下數列的極限值

$$\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}_{n=1}^{\infty} 。$$

(d) 從級數的觀點：我們也可以定義 e 爲下述無窮級數的和

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 。$$

爲了方便起見，我們稱第四個定義爲級數表示法，而第三個定義爲極限表示法。首先我們來比較一下這四個定義。第一個定義的方法不是太好，因爲連你要去估計一下它的大小，都困難重重！第二個定義的方法

好一些，至少有其幾何意義，使我們對歐拉數更有感覺;而且可透過黎曼和或其他的法則來計算其近似值。級數表示法遠比極限表示法好，當然這裏所謂的好，是比較它趨近e的速度。前者遠比後者快，而且快的很多。請看下面的計算：

$$\sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k!} \approx 2.71828, 18011, 46384, 47971, 78130, 51146, 4$$

$$\sum_{k=0}^{22} \frac{1}{k!} \approx 2.71828, 18284, 59045, 23536, 02471, 10869, 1$$

$$(1+\frac{1}{10})^{10} = 2.59374, 24601$$
$$(1+\frac{1}{10^8})^{10^8} \approx 2.71828, 17864$$

在 MATHEMATICA 中，和的指令爲：`Sum[f[k],{k,1,n}]` 意表

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n)。$$

所以上面的計算可由 MATHEMATICA 執行如下：

```
In[2]:= N[{Sum[1/k!,{k,0,10}],Sum[1/k!,{k,0,22}],
            (1+1/10)^10,(1+0.00000001)^100000000},32]
Out[2]= {2.7182818011463844797178130511464,
          2.7182818284590452353602471108691,
          2.5937424601000000000000000000000,
          2.718281786395798}
```

當$n=10$時，級數表示法精確到小數點之後第7位；而$n=22$時，則可精確到小數點之後第22位。但極限表示法，即使n大到$100000000=10^8$時，才精確到小數點之後第6位。

實際上，要估計$S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$與$e$之間的誤差，是非常容易的。且看下面的不等式：

$$e-S_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}\leq\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\right]=\frac{1}{n!n}$$

所以我們有

$$e-S_{10}<\frac{1}{(10!\times 10)}<10^{-7}$$

以及

$$e-S_{22}<\frac{1}{(22!\times 22)}<10^{-22}$$

如上面計算所顯示出來的。