

第一講：數學套裝軟體簡介

March 3, 2012

這是個怎麼樣的世代呢？除了傳統的數學領域及其研究方法之外，現在似乎又多了一個活動的空間，可以讓我們那自由且豐富的創造力與想像力在一個更寬更廣的世界中遨翔。在此，我們計劃藉著數學套裝軟體 MATHEMATICA¹ 計算(包括數值計算及符號演算)、繪圖(包括平面繪圖、立體繪圖及動態畫)與程式的功能，來擺脫一般傳統所習慣的「定義、定理、證明」之介紹模式；試圖以問話、啓發的方式，用更生動、更活潑的面貌來迎向那斬新的未來，一起邁入另一個新的千禧年(Millennium)。

我們將挑出數學中一些經常出現且較有名的常數，運用實驗的技巧，一起來探討相關的數學公式及其基本觀念。這是一個新的嘗試！若你在閱讀數學當中，發現到好的、有趣的題材，也可依樣畫葫蘆的進入

¹MATHEMATICA 是由美國 Wolfram Research 公司所研發出來的一套透過計算機來演算數學的系統(a system for performing mathematics by computer)。自從1988年問世以來，由於其多才多藝，MATHEMATICA 已建立起自己的形象而成爲眾多使用者所選擇的計算機代數系統。其實在科學的各個領域上，它也是一套強而有力的研究工具。

MATHEMATICA 的世界中暢遊一番。

1 工欲善其事，必先利其器：CAS 簡介

計算機代數系統（Computer Algebra System，簡稱 CAS）乃促進符號數學的一套軟體，其核心功能是對數學式子作符號形式的演算。

The first popular computer algebra systems were muMATH, Reduce, Derive (based on muMATH), and Macsyma; a popular copyleft version of Macsyma called Maxima is actively being maintained. As of today, the most popular commercial systems are Mathematica[1] and Maple, which are commonly used by research mathematicians, scientists, and engineers. Freely available alternatives include Sage (which can act as a front-end to several other free and nonfree CAS).

In 1987 Hewlett-Packard introduced the first hand held calculator CAS with the HP-28 series, and it was possible, for the first time in a calculator, to arrange algebraic expressions, differentiation, limited symbolic integration, Taylor series construction and a solver for algebraic equations.

The Texas Instruments company in 1995 released the TI-92 calculator with an advanced CAS based on the software Derive. This, along with its successors (including the TI-89 series and the newer TI-Nspire CAS released in 2007) featured a reasonably capable and inexpensive hand-held computer algebra system. CAS-equipped calculators are not permitted on the ACT, the PLAN, and in some classrooms because they may affect the integrity

of the test/class,[2] though it may be permitted on all of College Board's calculator-permitted tests, including the SAT, some SAT Subject Tests and the AP Calculus, Chemistry, Physics, and Statistics exams.

2 MATHEMATICA 簡介

MATHEMATICA 是一個強而有力的數學程式環境。它提供了數值的、符號的及圖形的工具，來協助我們解決數學方面的問題。已有相當多的人使用 MATHEMATICA 來觀察並分析工程、數學、物理學、經濟學及其他科學領域上的問題。MATHEMATICA 也可以當成高階的程式語言來使用。其工作的平台相當廣泛，從 Cray 的超級電腦到桌上型及膝上型輕便電腦皆可。在超過一百多萬個使用者當中，約有 28% 為工程師，21% 為電腦科學家，20% 為物理方面的專家，12% 為數學方面的專家，12% 為管理科學、社會科學及生命科學家。約有三分之二的使用者是在工業界及政府部門工作，而僅僅 8% 為學生使用者。

MATHEMATICA 是由兩部分所組成的，就是所謂的前端 (Front End) 及核心 (Kernel)。核心乃是其計算的引擎，負責所有的計算工作。前端則透過記事本介面 (notebook interface) 或指令行介面 (command line interface)，來作為使用者與核心之間的溝通橋樑。

當你啓動 MATHEMATICA 之後，它會自動開啓一個工作視窗²和一個常用的基本輸入面板 (Basic Input Palette)。我們稱此工作視窗為記事本 (Notebook)，而 MATHEMATICA 用一種特殊的檔案格式來儲存工作視窗

²這是一個未命名的空白檔案，名稱為 untitled-1，亦即未命名的第一個檔案。

的內容，其附加檔名為 .nb。這些記事本有如一般的文字處理機 (word processor) 一樣，你可在上面加註解³、做結論還可匯入或匯出多種不同格式的圖形檔。要發表的論文資料或上課講義可在此預備，也可在此下達指令透過印表機將這些文件列印出來。其中的資料可在記事本之內或之間互相剪貼，目的當然就是希望能再使用或是經過修改其文字、圖形或計算式子後成為我們所要的文件。

前端記事本檔案將裡面的資料分類安排放在所謂的“Cells”當中，所以這些 Cells 就是構成此記事本檔案最基本的單元。在這些文字、圖形或計算式的 Cells 之最右端都有「右中括弧」，而這些「右中括弧」就代表整個文字、圖形或計算式單元。輸入 Cells 含有 MATHEMATICA 的指令者可按下 SHIFT-RETURN 鍵 (先按住 SHIFT 鍵然後再按 RETURN 鍵) 來執行這些指令。文字 Cells 僅包含有文字信息，所以不需經由 Kernel 來計算。圖形 Cells 則包含有描繪圖及曲線圖。

我們可以把 Cells 格式化成具備各式各樣的屬性，如所展示的字體其大小與顏色等。這些 Cells 也可用摘要的形式來組織一文件，其方法如下：先點取此 Cells 最右端的「右中括弧」，再從工作視窗上點取 Format 選單中的 Style 然後選取 Title, Subtitle, Section, Subsection, ... 即可。

接著我們介紹一下 MATHEMATICA 所用的慣用語法，你可透過這些規則來了解 MATHEMATICA 的指令是怎麼下達的。

³若程式過於龐大，使用者得發很多時間從頭看起；所以一旦加上註解，使用者便可以清楚的知道程式的內容。一般的註解可直接寫在畫面上，但如此一來電腦在執行計算時便容易產生混亂。因此我們可先點取最右端的「右中括弧」，再從工作視窗上點取 Format 選單中的 Style 然後選取 Text 即可。

- 基本四則運算及指數所用的語法跟其他的程式語言完全一樣。
- 變數通常用小寫字母表示，但也可以是一個字串如 `yvalue=...`。
- 函數的變數 `x,y,...` 以中括弧 `[x,y,...]` 括起來，而小括弧則用來達到分組的效果。
- 串列 (List) 是 MATHEMATICA 最原始的資料結構，以大括弧 `{}` 括起來，其中的元素則用逗點分開。如一維串列 `{1,2,3}` 為一向量，而二維串列 `{{1,2,3},{4,5,6}}` 則表矩陣其第一列就是第一個元素 `{1,2,3}`。
- 內建函數與內建常數都是以大寫字母起頭，如 `Sin[Pi/2]`。
- 乘號是用 `*` 或是空格來代表，如 `a*b` 或 `a b`。變數與整個括號相乘可不用留空格，如 `a(b-1)`。數字與變數應注意前後次序，如 `7x` 表示 `7*x`，但 `x7` 表示一變數名為 `x7`，而 `x 7` 則表示乘積 `x*7`。
- 符號 `=` 意指代換，如 `t=1`；而相等則以符號 `==` 表示之，如 `Equal[x,t]` 或 `x==t` 只有當 `x` 與 `t` 有相同的值才會得真。
- 否定指令 `Not` 可用 `!` 表示之，如 `x!=t` 為真若 `x` 與 `t` 有不同的值時。
- 上一個輸入以 `%` 表示之，而 `%n` 指的是第 `n` 個輸入即 `In[n]`。所以 `%%` 意指上上一個輸入... 等等。
- 每一個 Cells 都是以 `In[n]:=` 開始的，但你絕不可鍵入這些，而只需鍵入你要的文字或指令，因為 MATHEMATICA 會自動在你執行(

即按下SHIFT-RETURN鍵)之後將之冠在前頭的位置。

3 MATHEMATICA 指令簡介

最後我們將遲早會用到的指令按字母順序介紹一下。你若想做進一步的探討，可透過 MATHEMATICA 網站或其他入門書 [1, 2, 5] 來達成你的美夢。或者也可以從 MATHEMATICA 「Help 視窗」當中輸入你所要了解的指令，詳細的介紹就會出現在你的眼前。注意 MATHEMATICA 對大小寫是靈敏的 (case sensitive)，字母是大寫就必須大寫，否則會出現錯誤信息。

- AxesLabel->{"x","y"} 座標軸的名稱，分別為 x -軸與 y -軸。
- E 自然對數的底 e ，其值約為 2.71828182845904523...
- Factorial[n] (或 n!) n 階乘，即 $n(n-1)(n-2)\dots 3\cdot 2\cdot 1$ 。
- Graphics[list] 為一二維圖形，list 包含三種類型的的基本元件，一是 RGBColor[]，二是 Point[{x,y}]，三式選項，而 Graphics 的結構則為

$$\text{Graphics}[\{\text{RGBColor}[\],\{\text{Points}[\]\},\{\text{Options}\}]$$

RGBColor[]、Points[] 與 Options 代表繪圖三要素中的圖形控制指令 (Graphics Directives 如點的大小、線條的粗細和顏色等)、基本圖元 (Graphics Primitives 如點、線、圓、圓盤和多邊形等) 與繪圖選項 (Graphics Options 如 PlotLabel, AspectRatio 等)，也就是說所有的 Graphics Objects 都是由此三要素組成的。

- `GrayLevel[level]` 爲一圖形指令，專管黑白兩種顏色的調配，其濃度由0(黑)到1(白)變動。
- `Hue[h]`
爲一圖形style的指令，指的是從0到1之間的系列色彩。
`Hue[h,s,b]` 指定系列色彩(Hue)、色飽度(Saturation)與亮度(Brightness)。其範圍爲0到1。
- `Line[{x1,y1},{x2,y2},...]` 經過點 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$ 的直線。
- `ListPlot[{y1,y2},...]` 畫出點 $(1, y_1), (2, y_2), \dots$ 。
`ListPlot[{(x1,y1),(x2,y2),...}]` 畫出點 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$ 。
- `MatrixForm[list]` 將串列`list`的元素用矩陣的形式列印出來。
- `N[expr]` 算式`expr`的近似值，其精確度爲預設值6位。
`N[expr, n]` 算式`expr`的近似值，其精確度爲`n`位。
- `Plot[f, {x, xmin, xmax}]` 函數`f`在區間 $[xmin, xmax]$ 的圖形。
`Plot[{f1, f2}, {x, xmin, xmax}]` 將函數 $f_1(x), f_2(x), \dots$ 在區間 $[xmin, xmax]$ 的圖形放在同一個座標平面上。
- `PlotJoined->True` 在`ListPlot`所描的點中，依序將相鄰兩點用直線連結。
- `PlotStyle->{}` 爲指令`Plot`與`ListPlot`中用來指明所要畫之線或點的style的一種選擇。

- `Rectangle[{xmin, ymin}, {xmax, ymax}]` 填滿顏色的長方形。
- `RGBColor[red, green, blue]` 爲一圖形 style 的指令，專管三基本色紅 (*red*)、綠 (*green*)、藍 (*blue*) 的調配，其濃度由 0 到 1 變動。
- `Show[{plot1, ...}, option]`

將數張圖片 *plot1, ...* 拼成一張成爲一個圖形顯現出來。

`Show[GraphicsArray[{plot1, plot2, ...}]]`

將圖形 *{plot1, plot2, ...}* 橫向排列。

`Show[GraphicsArray[{{plot1}, {plot2}, ...}]]`

將圖形 *{plot1, plot2, ...}* 縱向排列。

`Show[GraphicsArray[{{plot1, plot2, ...}, ...}]]`

將圖形以二維矩陣的形式排列。

- `Sum[f, {i, imax}]` 這些 $f(i)$ 的和， i 從 1 到 $imax$ 。
 - `Sum[f, {i, imin, imax}]` 這些 $f(i)$ 的和， i 從 $imin$ 到 $imax$ 。
 - `Sum[f, {i, imin, imax, di}]`
- 這些 $f(i)$ 的和， i 從 $imin$ 到 $imax$ ，其間距爲 di 。

- `Table[expr, {imax}]` 產生一包含 $imax$ 個 *expr* 的串列。

`Table[expr, {i, imax}]`

產生一 *expr* 之值的串列， i 從 1 到 $imax$ 。

`Table[expr, {i, imin, imax}]`

產生一 $expr$ 之值的串列， i 從 $imin$ 到 $imax$ 。

`Table[expr, {i, imin, imax, di}]`

產生一 $expr$ 之值的串列， i 從 $imin$ 到 $imax$ ，其間距為 di 。

`Table[expr, {i, imin, imax}, {j, jmin, jmax}]` 產生一 $expr$ 之值的二維串列， i 從 $imin$ 到 $imax$ ，而 j 從 $jmin$ 到 $jmax$ 。

- `Text[expr, {x, y}]` 以 (x, y) 為中心點的文字 $expr$ 。
- `Ticks->None` 指令 `Show` 中的選項之一，指明座標軸之刻度，其預設值為 `Automatic`，而設定為 `None` 時就沒有刻度記號出現。

參考文獻

- [1] Abell, Martha L. and Braselton, James P. : *Mathematica by Example*, 2nd Edition, Academic Press, San Diego, 1997.
- [2] Blachman, Nancy R. : *Mathematica: A Practical Approach*, Prentice Hall, New Jersey, 1992.
- [3] Clapham, Christopher: *A Concise Oxford Dictionary of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford/New York, 1990.
- [4] Daintith, John/Nelson, R.D.: *The Penguin Dictionary of Mathematics*, Penguin Books Ltd., 1989.

- [5] Gaylord, Richard J./Kamin, Samuel N./Wellin, Paul R. : *Introduction to Programming with Mathematica*, 1st Edition, Springer-Verlag New York, Inc., 1993.