微積分【下】期末考試1

系級：＿＿＿＿＿ 姓名：＿＿＿＿＿＿＿ 學號：＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 分數：＿＿＿

♣◇♠♡　注意：請將所有的過程詳細寫出來，每小題10分；共100分。　♣◇♠♡

1. 可微分性：

   (a) 定義函數g如下：

   $$g(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{若 } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{若 } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

   請問函數g在原點是否可微分？

   (b) 若函數f在$\mathbb{R}^2$有連續的二階偏導數，且

   $$f(0,1)=A,\ f_x(0,1)=B,\ f_y(0,1)=C,\ f_{xx}(0,1)=D,\ f_{xy}(0,1)=E,\ f_{yy}(0,1)=F\,.$$

   若$u(s,t)=f(s^2-t^2,st)$，試求偏導數 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial t}(1,1)$之值。

2. 極大極小：

(a) 令函數 $f(x,y)=x^3+3xy-y^3$, 且令 R 爲一三角形區域其頂點在 $(1,4),(1,-2)$ 及 $(-1,-2)$。試求函數 f 在 R 上的絕對極大與絕對極小值。

(b) 令 $h(x,y)=x^2+xy+y^2-6x+2$。試求出所有的臨界點，並利用第二階導數判別法將其分類爲極大點、極小點或鞍點。

(c) 試用 Lagrange 算子法求 $f(x,y)=x^2+y^2-2x+4y-3$ 當 (x,y) 限制在直線 $x+2y=5$ 上的極小值。

3. 雙重積分：

(a) 求雙重積分 $\displaystyle\iint_R 3\sin(y^3)dA$ 之值，此處 R 爲三曲線 $y=\sqrt{x},\ y=\sqrt[3]{\pi},$ 及 $x=0$ 所包圍的區域

(b) 求下雙重積分 $\displaystyle\iint_S (4-x^2-y^2)^{1/2}dA$ 之值，此處 S 爲圓 $x^2+y^2=4$ 在第一象限內介於 $y=0$ 及 $y=x$ 之間的扇形區域

(c) 求重複積分 $\displaystyle\int_1^2\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$ 之值

4. 曲線積分：

(a) 令 $\vec{F}(x,y,z) = (2xz + \sin y)\,\vec{i} + x\cos y\,\vec{j} + x^2\,\vec{k}$。試求線積分 $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ 之值，

此處 $\mathcal{C}$ ： $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\,\vec{k},\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ 。

(b) 試求線積分 $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} (1+\tan x)\,dx + (x^2 + e^y)\,dy$ 之值，

此處 $\mathcal{C}$ 為曲線 $y = \sqrt{x}$ 及二直線 $y = 0,\ x = 1$ 所包圍區域的邊界，其方向為逆時針方向。