一個更美的不等式

March 28, 2016

摘要

我們從上一個關於 e 的不等式，輕易的就可以得到另一個更美的不等式爲 $e(n^n e^{-n}) < n! < e(n^{n+1}e^{-n})$。透過實驗觀察 $n!$ 與 $n^{n+t}e^{-n}$ 之比值的漸近行爲 (t 爲一介於 0 與 1 之間的常數)。當 $t = \frac{1}{2}$ 時，圖形顯示此比值的極限爲一正實數 $s \approx 2.5066\cdots$，因而在實驗上得到 Stirling 公式的確據。透過階乘函數的第三個界定，我們證明了 Stirling 公式是對的，同時也利用這個公式本身算出常數 s 原來就是 $\sqrt{2\pi}$。

1　引言：一個更美的不等式

在第一章中，我們從歐拉數 e 談起，結束在與 e 有關的一個非常重要的不等式上，亦即

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e < \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1} 。$$

其實這個不等式本身也是挺有趣的，我們先寫成下面的形式：

$$\frac{(k+1)^k}{k^k} < e < \frac{(k+1)^{k+1}}{k^{k+1}}$$

然後將對應於 k 從 1 到 $n-1$ 的 $n-1$ 個不等式相乘在一起，左式爲

$$\frac{2^1}{1^1} \times \frac{3^2}{2^2} \times \frac{4^3}{3^3} \times \frac{5^4}{4^4} \times \cdots \times \frac{(n-1)^{n-2}}{(n-2)^{n-2}} \times \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} ,$$

而右式則變成

$$\frac{2^2}{1^2} \times \frac{3^3}{2^3} \times \frac{4^4}{3^4} \times \frac{5^5}{4^5} \times \cdots \times \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-2)^{n-1}} \times \frac{n^n}{(n-1)^n} 。$$

化簡後可得不等式：

$$
\begin{aligned}
& \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} < e^{n-1} < \frac{n^n}{(n-1)!} \\
\iff \quad & \frac{n^n}{n!} < \frac{e^n}{e} < \frac{n^{n+1}}{n!} \\
\iff \quad & e\left(n^n e^{-n}\right) < n! < e\left(n^{n+1} e^{-n}\right)
\end{aligned}
$$

很自然的，我們可從這組不等式來估計 $n!$ 的大小。當 n 增大時，$n!$ 很迅速的往無窮大趨近，亦即 $n!$ 增大的速度非常非常快，而這個不等式告訴我們 $n!$ 與 $n^{n+t}e^{-n}$ 是差不多大或是它的一個常數倍，此處 t 爲一介於 0 與 1 之間的常數。從計算或應用的角度來說，處理 $n^{n+t}e^{-n}$ 遠比處理 $n!$ 來的容易。所以我們就來觀察一下，當 n 趨近於無窮大時，這兩個數的比值

$$
S(n,t) = \frac{n!}{n^{n+t}e^{-n}}
$$

是否會趨近於某一個定數呢？我們再一次的使用 Mathematica 來幫助我們探討這個問題。

2 實驗：觀察 $n!$ 與 $n^{n+t}e^{-n}$ 之比值的漸近行爲

(a) 首先將此比值改寫爲 $\dfrac{n!\,e^n}{n^{n+t}}$，並用符號 $S[n,t]$ 表示之。

```
S[n_,t_]:= n!E^n/n^(n+t)
```

(b) 先選定一個介於 0 與 1 之間的定值 t，然後觀察不同的 n 值對 $S[n,t]$ 的影響，當 n 越來越大， $S[n,t]$ 是否會趨近於某個定數？很自然的第一個想到要測試的 t 值乃是 0 與 1 的平均值 0.5，對較大的 n 值請列出 $S[n,0.5]$ 之值。

```
Table[{n,S[n,0.5]},{n,100,1000,100}]//MatrixForm
```

(c) 因爲我們所要觀察的是當 n 趨近於無窮大時 $S[n,0.5]$ 的極限值，所以更好更快的一個方法是用函數圖形來處理。請畫出 $S[n,0.5]$ 的圖形，$n \in [1,100000]$。

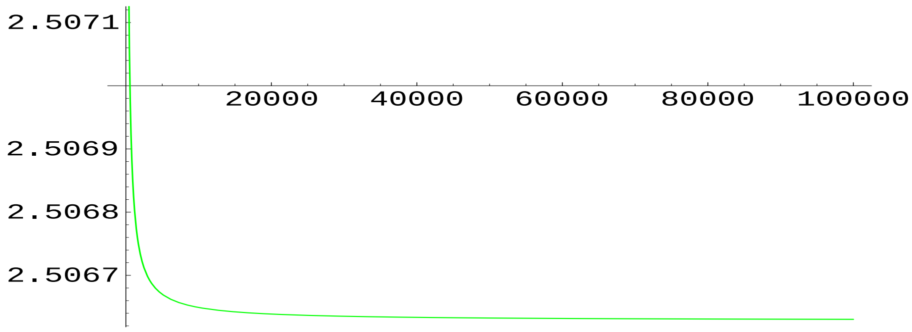

圖 1: 函數 $S(x, 0.5)$ 之圖形 $(t = 0.5)$

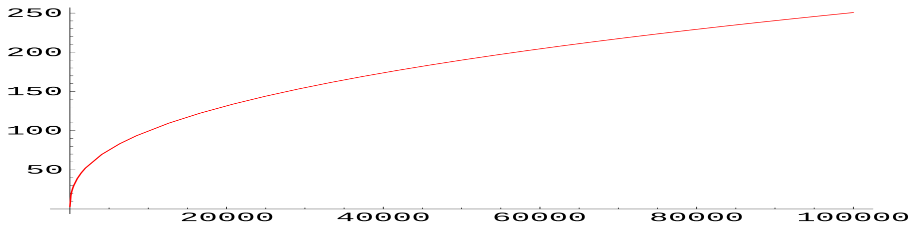

圖 2: 函數 $S(x, 0.1)$ 之圖形 $(t = 0.1)$

```
Plot[S[x,0.5],{x,1,10^5},
            PlotStyle->RGBColor[0,1,0]]
```

(d) 如上，請分析當 $t = 0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ \cdots,\ 0.9$ 其對應之數列

$$\{S(n,t)\}_{n=1}^{\infty}$$

的極限，用表列及圖示兩種方式來進行。

(e) 分析上面各種不同之 t 值所得的結果。

(f) 可再觀察並分析其他不同之 t 值所得的結果。

3 實驗結果的猜測

由上面的實驗 (請觀察圖 1至圖 9)，我們得到以下的猜測：

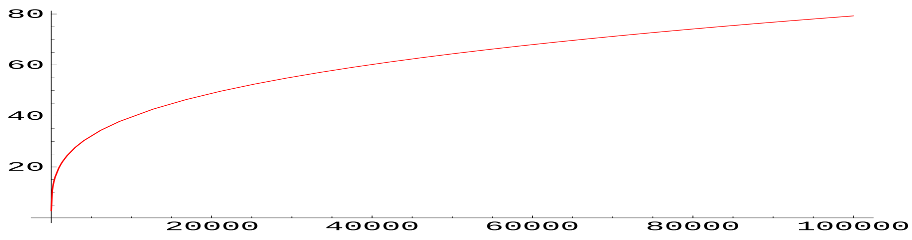

圖 3: 函數 $S(x, 0.2)$ 之圖形 $(t = 0.2)$

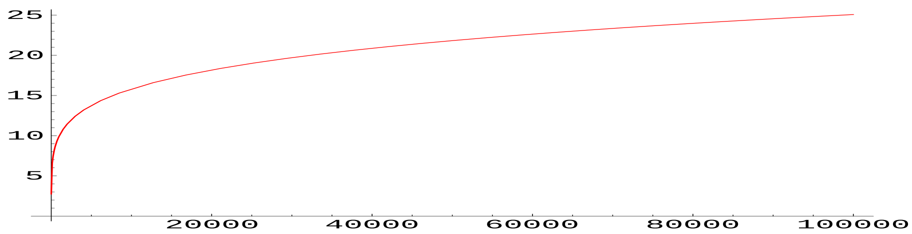

圖 4: 函數 $S(x, 0.3)$ 之圖形 $(t = 0.3)$

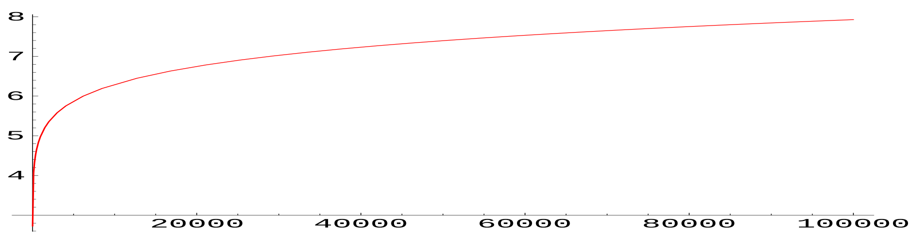

圖 5: 函數 $S(x, 0.4)$ 之圖形 $(t = 0.4)$

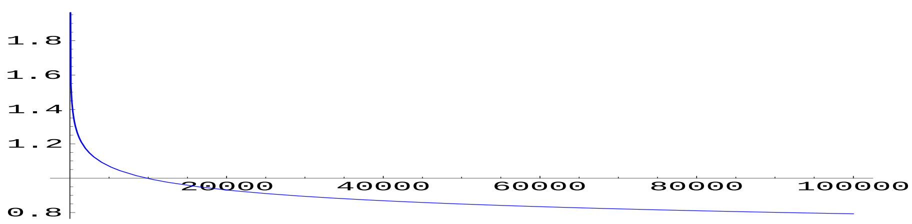

圖 6: 函數 $S(x, 0.6)$ 之圖形 $(t = 0.6)$

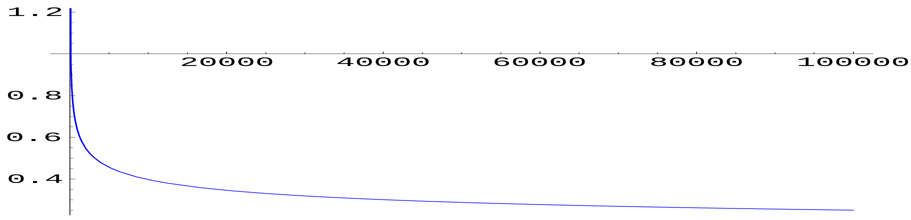

圖 7: 函數 $S(x, 0.7)$ 之圖形 $(t = 0.7)$

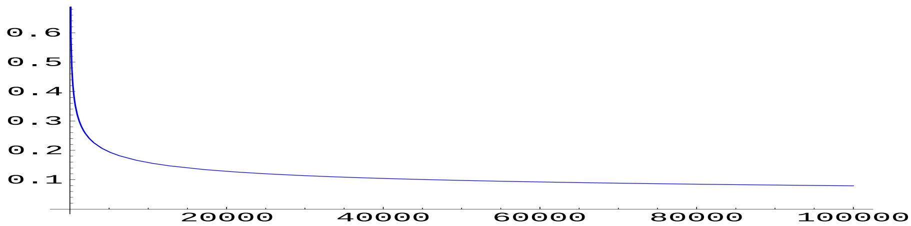

圖 8: 函數 $S(x, 0.8)$ 之圖形 $(t = 0.8)$

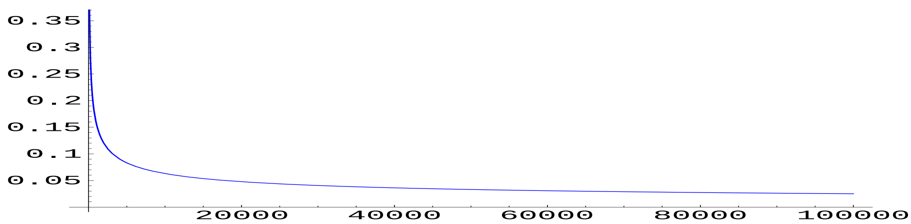

圖 9: 函數 $S(x, 0.9)$ 之圖形 $(t = 0.9)$

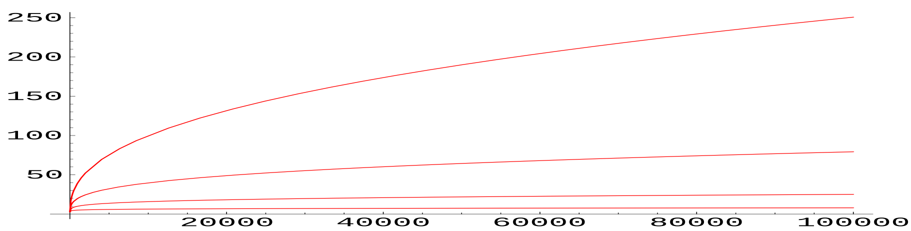

圖 10: 函數 $S(x, 0.1), \cdots, S(x, 0.4)$ 之圖形

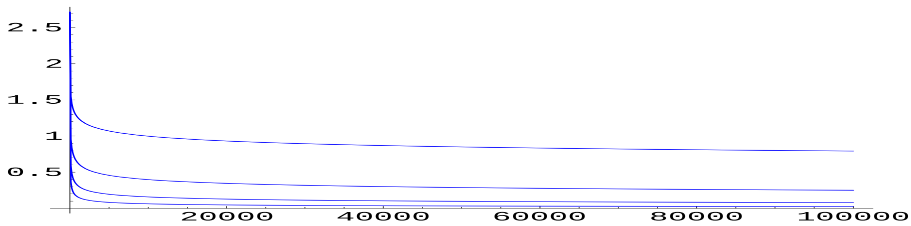

圖 11: 函數 $S(x,0.6),\cdots,S(x,0.9)$ 之圖形

(a) 數列 $\{S(n,0.5)\}_{n=1}^{\infty}$ 爲一遞減且有界的數列。所以根據單調收斂定理 (Monotone Convergence Theorem)，我們知道這個數列是收斂的。令 s 爲其極限。圖 1顯示 $s \approx 2.5066\cdots$ ，這個極限顯然不等於歐拉數 e。

(b) 如果 $t<0.5$，則數列 $\{S(n,t)\}_{n=1}^{\infty}$ 是遞增但無上界。所以我們不能指望這個數列會是收斂的。(請觀察圖 10)

(c) 如果 $t>0.5$，則數列 $\{S(n,t)\}_{n=1}^{\infty}$ 是遞減的而且其圖形有一水平漸近線，很顯然的就是 x-軸。(請觀察圖 11)

由此，可得到如下的猜測；我們用符號 $g(n)\sim f(n)$ 表示

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)}=1 \text{ 。}$$

【猜測一】對正整數 n，我們有 $n!\sim s\,n^{n+0.5}e^{-n}$ ，此處 s 爲一常數。

4 分析：引進階乘函數 $\Gamma(x)$

下面讓我們試著來證明這個猜測是對的，同時也讓我們一睹常數 s 的盧山真面目。在初等微積分中，我們處理過無限積分，像 $\int_0^\infty e^{-t}dt$，$\int_0^\infty te^{-t}dt$， $\int_0^\infty t^2e^{-t}dt$， $\cdots$ 等。由數學歸納法，我們有

$$\int_0^\infty t^ne^{-t}dt=n! \text{ 。}$$

這個 $n!$ 的積分表示法建議我們考慮無限積分 $\int_0^\infty t^xe^{-t}dt$，於是階乘函數的研究之旅就此展開。傳統上，我們習慣定義階乘函數爲

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \text{ 。}$$

眾所周知，階乘函數 $\Gamma(x)$ 爲定義在 $(0,\infty)$ 的正函數而且滿足函數方程式 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ 以及起始條件 $\Gamma(1)=1$。然而，僅僅這兩個性質還是無法界定階乘函數。我們很容易看出，起始條件在整個界定上是無關緊要的。因爲如果 $f(x)$ 是定義在 $(0,\infty)$ 的正函數且滿足函數方程式 $f(x+1)=xf(x)$，則 $g(x)=f(x)/f(1)$ 也是定義在 $(0,\infty)$ 的正函數，滿足同一函數方程式而且 $g(1)=1$。令人驚訝的是，$\log\Gamma(x)$ 函數的凸性就足以界定階乘函數。這是由 H. Bohr 與 J. Mollerup 所發現的事實，詳情請參閱 [5]。換句話說，上述兩性質加上 $\log\Gamma(x)$ 函數的凸性就可以界定階乘函數。其證明可參閱 Emil Artin[1] 漂亮的小書 [2, 3] 或是 Walter Rudin 的名作 [14]。

第二個界定階乘函數的公式乃是由 Laugwitz 及 Rodewald[13] 所提出。他們說， $\log\Gamma(x)$ 函數的凸性可取代爲性質 (L)：

$$L(n+x)=L(n)+x\log(n+1)+r_n(x), \text{此處} L(x)=\log\Gamma(x+1), \lim_{n\to\infty} r_n(x)=0\text{。}$$

然而，他們並沒有證明性質 (L) 與 $\log\Gamma(x)$ 函數的凸性之間是怎麼個連結起來而且等價的問題。這個界定階乘函數的概念可追溯到歐拉，請參閱 [10]。

如果仔細分析一下性質 (L)，我們馬上會察覺到自然對數的引進與否，無關緊要。沒有的話，上面的式子和變成積，反而更簡捷且更接近階乘函數的積的表示法。基於此種考慮，我們可得到下面的性質，稱之爲性質 (P)：

$$\Gamma(x+n)=\Gamma(n)n^x t_n(x),\ \text{此處} \lim_{n\to\infty} t_n(x)=1\text{。}$$

如上所期望，這給了我們第三個界定階乘函數的公式。

【定理】存在唯一定義於 $(0,\infty)$的正函數 $f(x)$ 滿足下列三個性質：

(a) $f(1)=1$；

(b) $f(x+1)=xf(x)$；

(c) $f(x+n)=f(n)n^x t_n(x)$，此處 $\lim_{n\to\infty} t_n(x)=1$。

[1]阿丁 Emil Artin (1898–1962) 德國數學家。陳省身在學算四十年 [7] 一文中說到：「漢大數學教授除布拉希克 (Blaschke) 外，尚有阿丁 (Artin)、Hecke 二人，其中尤以阿丁氏最爲特出。他是近代抽象代數開創者之一。但他的興趣及於整個數學。他的演講與論文，都是組織嚴密，曲折不窮。難懂的理論，經他整理，都變成自然。他二十多歲即任正教授，爲人隨和，看起來像學生。」

詳細的證明請參閱 [15]，在此我們來看看唯一性的證明。

【引理】對任何的正數 $x>0$，函數數列 $\{f_n(x)\}$ 是收斂的，此處

$$f_n(x)=\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\text{。}$$

【證明】取對數，可得

$$\begin{aligned}\log f_n(x) &= x\log n+\sum_{k=1}^{n}\log k-\log x-\sum_{k=1}^{n}\log(x+k)\\ &= x\log n-\log x-\sum_{k=1}^{n}\log(1+\frac{x}{k})\\ &= -\log x-x\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right]+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{x}{k}-\log(1+\frac{x}{k})\right]\\ &= -\log x-x\gamma_n+c_n(x)\ ,\end{aligned}$$

此處 $\gamma_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n$，還有 $c_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{x}{k}-\log(1+\frac{x}{k})\right]$。眾所周知，數列 $\{\gamma_n\}$ 收斂於歐拉常數 $\gamma\approx 0.577215664902\cdots$。對 $k>x>0$，我們有

$$0<\frac{x}{k}-\log(1+\frac{x}{k})=\frac{x}{k}-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{i}(\frac{x}{k})^i\le\frac{x^2}{2k^2}\ \text{。}$$

比較法告訴我們，數列 $\{c_n(x)\}$ 是收斂的，所以 $\{\log f_n(x)\}$ 是收斂的，因此原來的數列 $\{f_n(x)\}$ 也是收斂的。

```
In[7]:= N[EulerGamma,12]
Out[7]= 0.577215664902
```

【定理唯一性的證明】若函數 f 滿足定理中所述的三個性質，則從性質 (a) 與性質 (b) 可得

$$f(n)=(n-1)!\ ，\tag{1}$$

$$f(x+n)=(x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)xf(x)\ \text{。}\tag{2}$$

將 (2) 式，性質 (c)，以及 (1) 式合在一起，我們有

$$f(x)=\frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\cdot t_n(x)=f_n(x)\cdot s_n(x),$$

此處 $s_n(x) = \dfrac{x+n}{n} \cdot t_n(x)$，而 f_n 則爲引理中的那個函數。由性質 (c) 得知 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = 1$，所以我們有下面的公式：

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \text{ 。} \tag{3}$$

因此可得結論， $f(x)$ 是唯一的。

爲了討論上的方便，我們採用下面的術語。

【定義】我們稱一個定義於 $(0,\infty)$ 的正函數 f 爲 PG (pre-gamma) 函數，如果 f 滿足函數方程式 $f(x+1) = xf(x)$。

現在我們可以重述到目前爲止階乘函數的界定方法，如下：
【界定一】若 f 爲一滿足性質 (C) 的 PG 函數

$$\log f \text{ 爲區間 } (0,\infty) \text{ 上的凸函數，} \tag{C}$$

則 $f(x) = c\Gamma(x)$，此處 c 爲一常數。
【界定二】若 f 爲一滿足性質 (L) 的 PG 函數 ($L(x) = \log f(x+1)$)

$$L(n+x) = L(n) + x\log(n+1) + r_n(x) \text{ 且 } \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0\text{，} \tag{L}$$

則 $f(x) = c\Gamma(x)$，此處 c 爲一常數。
【界定三】若 f 爲一滿足性質 (P) 的 PG 函數

$$f(n+x) = f(n)n^x t_n(x) \text{ 且 } \lim_{n\to\infty} t_n(x) = 1\text{，} \tag{P}$$

則 $f(x) = c\Gamma(x)$，此處 c 爲一常數。

顯而易見的，在這三個不同的界定當中，常數 c 均爲 $f(1)$。換句話說，任何 PG 函數 f 具有 $f(1) = 1$ 且滿足性質 (C)，或性質 (L)，或性質 (P) 的，必定就是階乘函數。

事實上，對一個 PG 函數而言，性質 (C)，性質 (L)，性質 (P) 是等價的 ; 詳細的證明請參閱 [15]。所以前面證明唯一性時，在引理中的那個函數（ 亦即 (3) 式 ）就是階乘函數本身。

現在我們回到前面的猜測一。因爲 $\Gamma(n+1) = n!$ 以及 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$，所以我們將猜測一改寫爲

【猜測二】對正數 x，我們有 $\Gamma(x) \sim s x^{x-0.5} e^{-x}$，此處 s 爲一常數。

如果這個猜測是對的，令

$$\mu(x) = \log\left(\frac{\Gamma(x)}{s x^{x-0.5} e^{-x}}\right),$$

則 $\Gamma(x) = s x^{x-0.5} e^{-x} e^{\mu(x)}$。所以這個猜測建議我們考慮函數

$$f(x) = x^{x-0.5} e^{-x} e^{\mu(x)} \quad。 \tag{4}$$

我們所面臨的問題變爲：尋找函數 $\mu(x)$，使得 f 滿足界定三的條件。怎麼樣的 $\mu(x)$ 才能使 f 是一個 PG 函數呢？且看：

$$\begin{aligned}
f(x+1) = x f(x) \quad &\iff \quad 1 = \frac{f(x+1)}{x f(x)} \\
&\iff \quad 1 = \frac{(x+1)^{x+0.5} e^{-x-1} e^{\mu(x+1)}}{x x^{x-0.5} e^{-x} e^{\mu(x)}} \\
&\iff \quad e^{\mu(x)-\mu(x+1)} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+0.5} e^{-1} \\
&\iff \quad \mu(x) - \mu(x+1) = (x+0.5)\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 \quad。
\end{aligned}$$

令 $g(x) = (x+0.5)\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1$。所以 f 是一個 PG 函數的充要條件爲 $\mu(x) - \mu(x+1) = g(x)$。怎麼樣的 $\mu(x)$ 才滿足這條件呢？很簡單，$\mu(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} g(x+k)$ 就是其中一個。也許你會指控說：「你連級數的收斂性都還不知道，怎可如此大膽呢？」但萬事總有一個起頭嘛！忍耐一下，姑且假設它是收斂的。好啦！那這樣的 μ 是不是使得 f 滿足性質 (P) 呢？我們先看看再說吧！且看：

$$\begin{aligned}
t_n(x) &= \frac{f(n+x)}{f(n) n^x} \\
&= \frac{(n+x)^{n+x-0.5} e^{-n-x} e^{\mu(n+x)}}{n^{n-0.5} e^{-n} e^{\mu(n)} n^x} \\
&= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+x-0.5} e^{-x} e^{\mu(n+x)-\mu(n)} \quad。
\end{aligned}$$

我們知道

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+x-0.5} = e^x \quad。$$

所以只要能證明 $\lim_{n\to\infty} e^{\mu(n+x)-\mu(x)} = 1$ ，那麼性質 (P) 就沒問題。
事實上，

$$\mu(n+x)=\sum_{k=0}^{\infty} g(n+x+k)=\sum_{k=n}^{\infty} g(x+k), \qquad \mu(n)=\sum_{k=0}^{\infty} g(n+k)=\sum_{k=n}^{\infty} g(k)$$

都是上面那個無窮級數的尾巴。所以當 n 趨近於無窮大時，這兩個無窮級數當然都會趨近於 0。

現在我們回頭討論上面那個無窮級數 $\sum_{k=0}^{\infty} g(x+k)$ 的收斂性。首先我們將 g 寫成下面的形式：

$$g(x) = \frac{1}{2}(2x+1)\log\left(\frac{1+\frac{1}{2x+1}}{1-\frac{1}{2x+1}}\right) - 1 \text{ 。} \tag{5}$$

令 $y = \frac{1}{2x+1}$，則 $0 < y < 1$，此乃因爲 $x > 0$。眾所皆知，

$$\begin{aligned} \log(1+y) &= +y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + - \cdots \\ \log(1-y) &= -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - - \cdots \end{aligned}$$

所以，我們有下面的展開式

$$\frac{1}{2}y^{-1}\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = 1 + \frac{y^2}{3} + \frac{y^4}{5} + \frac{y^6}{7} + \cdots \text{ 。}$$

回到上面的 (5) 式，我們得到

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{3(2x+1)^2} + \frac{1}{5(2x+1)^4} + \frac{1}{7(2x+1)^6} + \cdots \\ &< \frac{1}{3(2x+1)^2}\left[1 + \frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+1)^4} + \cdots\right] \\ &= \frac{1}{3(2x+1)^2}\frac{1}{1-(\frac{1}{2x+1})^2} \\ &= \frac{1}{12x} - \frac{1}{12(x+1)} \text{ 。} \end{aligned}$$

因此，我們有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} g(x+k) &< \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{12(x+k)}-\frac{1}{12(x+k+1)}\right)\\ &= \frac{1}{12x}-\frac{1}{12(x+n+1)}\\ &< \frac{1}{12x}\text{。}\end{aligned}$$

所以我們的無窮級數 $\sum_{k=0}^{\infty} g(x+k)$ 是正項級數，而且其部份和是有上限的。結論是它是收斂的，所以我們得到

$$\lim_{x\to\infty}\mu(x)=0 \quad \text{亦即} \quad \lim_{x\to\infty}e^{\mu(x)}=1\text{ 。}$$

界定三告訴我們 $f(x)=c\Gamma(x)$，或者寫成下式

$$\Gamma(x)=sx^{x-0.5}e^{-x}e^{\mu(x)}\ ,$$

此處 $s=1/c=1/f(1)$ 爲一常數。這就證明了猜測三是對的，此即一般所謂的 Stirling [2]公式。因此我們就把這個常數 s 稱之爲 Stirling 常數。

最後，讓我們將上面所得到的結果用來解開 Stirling 常數的廬山真面目，做爲這一章的結束。我們會用到 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ ，第 (3) 式，以及上面剛得到的結果 $n!\sim sn^{n+0.5}e^{-n}$ 。且看：

$$\begin{aligned}\Gamma(\frac{1}{2}) &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^{0.5}n!}{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\cdots\frac{2n+1}{2}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}(n!)^2n^{0.5}}{(2n)!(2n+1)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}s^2n^{2n+1}e^{-2n}n^{0.5}}{s(2n)^{2n+0.5}e^{-2n}(2n+1)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{s(2n)}{\sqrt{2}(2n+1)}\text{ 。}\end{aligned}$$

[2]史特林 James Stirling (1692–1770) 是來自牛頓學校的英國數學家。此公式實際上在更早的年代已由 Abraham De Moivre (1667–1754) 所建立。

所以我們有等式 $\sqrt{\pi} = s/\sqrt{2}$，因此可得

$$s = \sqrt{2\pi}\text{，}$$

這就是 Stirling 常數。

5 Mathematica 指令簡介

最後我們將此章用過的指令按字母順序介紹一下。你若想做進一步的探討，可透過 Stephen Wolfram 的書 [19] 或其他入門書 [1, 4, 11, 12] 來達成你的美夢。或者也可以從 Mathematica「Help 視窗」當中輸入你所要了解的指令，詳細的介紹就會出現在你的眼前。注意 Mathematica 對大小寫是靈敏的 (case sensitive)，字母是大寫就必須大寫，否則會出現錯誤信息。

- `ColumnForm[`$\{e_1, e_2, \cdots\}$`]` 將串列 $\{e_1, e_2, \cdots\}$ 的元素用行的形式列印出來，e_1 在 e_2 之上。

  `ColumnForm[`*list*, *horiz*`]` 指明 *list* 中的元素向左 (Left)、向中 (Center) 或向右 (Right) 看齊，再列印出來。

- `E` 自然對數的底 e，其值約爲 $2.718281828459045 23\cdots$。

- `EulerGamma` 歐拉常數 γ，其值約爲 $0.577215664902\cdots$。

- `Factorial[n]`(或 `n!`) n 階乘，即 $n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$。

- `MatrixForm[`*list*`]` 將串列 *list* 的元素用矩陣的形式列印出來。

- `N[`*expr*`]` 算式 *expr* 的近似值，其精確度爲預設值 6 位。

  `N[`*expr*, *n*`]` 算式 *expr* 的近似值，其精確度爲 n 位。

- `Plot[`f, $\{x, xmin, xmax\}$`]` 函數 f 在區間 $[xmin, xmax]$ 的圖形。

  `Plot[`$\{f_1, f_2, \cdots\}$, $\{x, xmin, xmax\}$`]` 將函數 $f_1(x), f_2(x), \cdots$ 在區間 $[xmin, xmax]$ 的圖形放在同一個座標平面上。

- `PlotStyle->{}` 爲指令 Plot 與 ListPlot 中用來指明所要畫之線或點的 style 的一種選擇。

- `RGBColor[`*red*, *green*, *blue*`]` 爲一圖形 style 的指令，專管三基本色紅 (*red*)、綠 (*green*)、藍 (*blue*) 的調配，其濃度由 0 到 1 變動。

- `Show[`$\{plot1,\cdots\}$`,Ticks->None]` 將數張圖片 $plot1,\cdots$ 拼成一張，座標軸之刻度設 `None` 就沒有刻度記號出現。
- `Table[`$expr$, $\{imax\}$`]` 產生一包含 $imax$ 個 $expr$ 的串列。

  `Table[`$expr$, $\{i, imax\}$`]`

  產生一 $expr$ 之値的串列， i 從 1 到 $imax$。

  `Table[`$expr$, $\{i, imin, imax\}$`]`

  產生一 $expr$ 之値的串列，i 從 $imin$ 到 $imax$。

  `Table[`$expr$, $\{i, imin, imax, di\}$`]`

  產生一 $expr$ 之値的串列，i 從 $imin$ 到 $imax$，其間距爲 di。

  `Table[`$expr$, $\{i, imin, imax\}$, $\{j, jmin, jmax\}$`]` 產生一 $expr$ 之値的二維串列，i 從 $imin$ 到 $imax$，而 j 從 $jmin$ 到 $jmax$。

參考文獻

[1] Abell, Martha L. and Braselton, James P.: *Mathematica by Example*, 2nd Edition, Academic Press, San Diego, 1997.

[2] Artin, Emil : *The Gamma Function*, Holt, Rinehart & Winston, Inc., New York, 1964.

[3] Artin, Emil : Einführung in die Theorie der Gammafunktion, Teubner, 1931.

[4] Blachman, Nancy R. : *Mathematica*: *A Practical Approach*, Prentice Hall, New Jersey, 1992.

[5] Bohr, H./Mollerup, J. : *Laerebog i matematisk Analyse*, Kopenhagen, 1922, vol. III, pp. 149-164.

[6] Bressoud, David M. : *A Radical Approach to Real Analysis*, MAA, Washington D.C., 1994.

[7] 陳省身，學算四十年，傳記文學第五卷第五期，55 年 5 月。

[8] Clapham, Christopher: *A Concise Oxford Dictionary of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford/New York, 1990.

[9] Daintith, John/Nelson, R.D.: *The Penguin Dictionary of Mathematics*, Penguin Books Ltd., 1989.

[10] Euler, Leonhard : *Institutiones calculi differentialis*, Teubner, 1980; Leonhardi Euleri opera omnia, 10.

[11] Gaylord, Richard J./Kamin, Samuel N./Wellin, Paul R.: *Introduction to Programming with Mathematica*, 1st Edition, Springer-Verlag New York, Inc., 1993.

[12] 洪維恩，《MATHEMATICA 3.0 版入門指引》，松崗電腦圖書資料股份有限公司，1998 年 2 月。

[13] Laugwitz, Detlef and Rodewald, Bernd : A simple characterization of the gamma function, *Amer. Math. Monthly*, 94 (1987), 534-536.

[14] Rudin, Walter : *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd Edition, McGraw-Hill Book Co., New York, 1976.

[15] Shen, Yuan-Yuan : On Characterizations of the Gamma Function, *Math. Mag.*, Vol. 68, No. 4, October 1995, 301-305.

[16] 沈淵源，從尤拉數 e 到 Stirling 常數，東海學報第三十六卷， 84 年 7 月，第 79–96 頁。

[17] 沈淵源，從尤拉數 e 到 Stirling 常數，數學傳播第二十卷第一期 (77)， 85 年 3 月，第 34–45 頁。

http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_20_1_03/index.html

[18] 蔡聰明，談 Stirling 公式，數學傳播第十七卷第二期 (66)， 82 年 6 月。http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_17_2_05/index.html

[19] Wolfram, Stephen: *The* MATHEMATICA *Book*, 3rd Edition, Version 3, Wolfram Media/Cambridge University Press, 1996.