微積分預習測驗13

姓名：＿＿＿＿＿＿ 學號：＿＿＿＿＿＿ 分數：6 5 4 3 2

設 n, k 為正整數 $(k > 1)$。令 $S_n(k)$ 為前 $k-1$個自然數的 n 次方和。我們試著以最原始的方法(其觀念源自 Jacques Bernoulli) ，用數學的套裝軟體 MATHEMATICA為實驗的工具， 透過其符號演算的功能來引導我們探討 $S_n(k)$ 的一個公式：

$$S_n(k) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} B_i \; k^{n+1-i},$$

此處 B_i 為 Bernoulli數。

1 引言：七分半鐘的挑戰

請計算前一千個自然數的十次方和：

$$1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \cdots + 1000^{10}\text{。}$$

當你遇到這樣問題的時候，你會有怎麼樣的反應呢？ 可能你的第一個反應是期待MATHEMATICA幫幫忙! 那麼就讓我們趕快進入 MATHEMATICA的世界中吧。

```
In[1]:= Sum[a^10,{a,1,1000}]
Out[1]= 91409924241424243424241924242500
```

十分之一秒鐘不到，MATHEMATICA就告訴你答案是：

$$91409924241424243424241924242500$$

實在太美了，太令人興奮了! 興奮之餘可能你期待有個公式來算，免得每次勞駕MATHEMATICA。三百多年前JACQUES BERNOULLI [1] 說他可以在半刻鐘之內算出這個和，你呢？ 除了上面兩個期待之外，還有其他的妙計嗎？

我們都很熟悉，前$k-1$ 個自然數的和、平方和及立方和之公式為：

$$\begin{aligned}
1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1) &= \frac{1}{2}\; k^2 - \frac{1}{2}\; k, \\
1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (k-1)^2 &= \frac{1}{3}\; k^3 - \frac{1}{2}\; k^2 + \frac{1}{6}\; k, \\
1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (k-1)^3 &= \frac{1}{4}\; k^4 - \frac{1}{2}\; k^3 + \frac{1}{4}\; k^2\text{。}
\end{aligned}$$

還記得當初你是怎麼導出這些公式的嗎？ 當你在國中的時候， 不費吹灰之力的，就可以導出一次方和的公式。 令

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1),$$

[1] **伯努利**JACQUES BERNOULLI (1654–1705) 瑞士數學家， 以他在微積分與機率的著作而成名。在1690年首度接觸微積分時， 他最感興趣的是把微積分應用在曲線的研究上，特別是對數螺線 (logarithmic spiral)與捷線 (brachistochrone)，伯努利雙紐線 (lemniscate of Bernoulli) 則是以他的名字來命名的。1691年， 他成為運用極座標的第一人，也寫了機率理論方面的第一本書“*Ars Conjectandi* ”在其死後出版於1713年，其中包含 Bernoulli數與 Bernoulli 定理的說明。

將此和之次序倒過來書寫，我們就有

$$S_1=(k-1)+(k-2)+(k-3)+\cdots+1,$$

再把這兩種寫法按序將對應項相加得到 k，所以就有下面的等式

$$2S_1=k+k+k+\cdots+k。$$

這裡共有 $k-1$ 個 k，因此 S_1 的公式馬上就在我們眼前。

怎麼樣把這個方法推廣到平方和呢？這下子你可就灰頭土臉的了。怎麼辦呢？ 山不轉，但路可以轉，所以人生的經歷告訴我們，是路轉的時候了。 所謂路轉者也，就是方法要變囉。一次方來自兩個連續整數的平方差$\cdots$，

$$(j+1)^2-j^2=2j+1。$$

若將對應於 $j=0,1,2,\cdots,k-1$ 的 k 個等式相加， 等式的左方對消之後只剩 k^2，而等式的右方有兩倍的一次方和加上 k 個 1 。 所以我們有

$$k^2=2[1+2+3+\cdots+(k-1)]+k\cdot 1,$$

整理後可得到

$$1+2+3+\cdots+(k-1)=\frac{1}{2}\,k^2-\frac{1}{2}\,k。$$

山路崎嶇，或許你會覺得太浪費時間，但這是確定可以抵達山頂的一個方法（當你搭上阿里山的登山鐵道時，必有同感）。如法泡製， 我們可以處理平方和的問題：

$$(j+1)^3-j^3=3j^2+3j+1。$$

同樣地，將對應於 $j=0,1,2,\cdots,k-1$ 的 k 個等式相加，可得

$$k^3=3[1^2+2^2+3^2+\cdots+(k-1)^2]+3[1+2+3+\cdots+(k-1)]+k\cdot 1,$$

代入前面一次方和的公式，化簡後，我們有

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(k-1)^2=\frac{1}{3}\,k^3-\frac{1}{2}\,k^2+\frac{1}{6}\,k。$$

重複此法，十次之後我們就可以得到 $1^{10}+2^{10}+3^{10}+\cdots+(k-1)^{10}$的公式，令 $k=1001$， 即可得到結果。但不管你速度多快，也無法在半刻鐘 [2] 之內完成，你還是輸給了 Jacques Bernoulli 。為什麼呢？因為我們的方法是登山鐵道的 辦法，到第二階，得先經過第一階；是可以抵達山頂，但太不經濟了！ 是否真的如此呢？最後我們再作評論。

Jacques Bernoulli 之所以與眾不同， 在於他用分析的方法來解決代數的問題，他不搭火車而是搭直昇機！ 他聲稱有唯一的一個首項係數為1 之 n 次多項式 $B_n(x)$ 使得

$$1^n+2^n+3^n+\cdots+(k-1)^n=\int_0^k B_n(x)\,dx\ 。$$

其實Jacques Bernoulli 的慧眼， 只需要微積分的知識與訓練就可擁有的。還沒有作實驗之前， 請先思考下面兩個問題：

(a) 可否設計一個實驗來證明你也可以當Jacques Bernoulli 呢？

[2] 當然這裡指的半刻鐘是由導出的公式來執行演算所需的時間， 但我們真正要比較的是導出公式所花的時間。

(b) 很自然的，上面所定義的這些多項式 $B_n(x)$ 我們就稱為 Bernoulli 多項式。你能用 Mathematica 設計一個實驗來計算這些多項式 $B_n(x)$ 嗎？

令 $S_n(k)$ 為前 $k-1$ 個自然數的 n 次方和。 我們的目標是：

$$\boxed{\text{找出 } S_n(k) \text{ 的公式(不單單是遞迴公式而已)}}$$

由前面三個 $S_n(k)$ 的公式，不難猜出其形式為

$$S_n(k) = \frac{1}{n+1}\ k^{n+1} - \frac{1}{2}\ k^n + \cdots + B_n k, \tag{1}$$

此處 B_n為一常數，而這就是 Jacques Bernoulli 的那雙慧眼所看到的。為了確認其形式的確如此， 而不是因為我們的想像力太過豐富(才觀察三個例子就知道一般的公式)， 所以就讓我們多觀察幾個 $S_n(k)$的公式吧！

2 實驗一： Jacques Bernoulli 的慧眼

Mathematica 不單單能做數值計算， 並且也能做符號演算。

(a) 首先定義函數 $S_n(k) = S[n,k]$, 然後列出 $S[n,k]$, $n = 1, 2, \cdots, 9$。

```
In[2]:= S[n_,k_]:=Expand[Sum[a^n,{a,1,k-1}]];
Table[{n,Print["n = ", n, ", S_n(k) = ",
S[n,k]]},{n,1,9}]//ColumnForm;
```

(b) 觀察其形式可得到怎麼樣的規則呢？

(c) 若將 $S[n,k]$ 對 k 來微分，觀察其形式又如何呢？

```
In[3]:= S[n_,k_]:=Expand[Sum[a^n,{a,1,k-1}]];
Table[{n,Print["n =", n, ", S'_n(k) = ",
D[S[n,k],k]]},{n,1,9}]//MatrixForm;
```

(d) 你也可以當 Jacques Bernoulli嗎？

3 實驗一之結果與分析

實驗一(a) 的輸出結果如下：

$n = 1, \quad S_n(k) = -\frac{k}{2} + \frac{k^2}{2}$

$n = 2, \quad S_n(k) = \frac{k}{6} - \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{3}$

$n = 3, \quad S_n(k) = \frac{k^2}{4} - \frac{k^3}{2} + \frac{k^4}{4}$

$n = 4, \quad S_n(k) = -\frac{k}{30} + \frac{k^3}{3} - \frac{k^4}{2} + \frac{k^5}{5}$

$n = 5, \quad S_n(k) = -\frac{k^2}{12} + \frac{5k^4}{12} - \frac{k^5}{2} + \frac{k^6}{6}$

$$n=6,\quad S_n(k)=\frac{k}{42}-\frac{k^3}{6}+\frac{k^5}{2}-\frac{k^6}{2}+\frac{k^7}{7}$$

$$n=7,\quad S_n(k)=\frac{k^2}{12}-\frac{7k^4}{24}+\frac{7k^6}{12}-\frac{k^7}{2}+\frac{k^8}{8}$$

$$n=8,\quad S_n(k)=-\frac{k}{30}+\frac{2k^3}{9}-\frac{7k^5}{15}+\frac{2k^7}{3}-\frac{k^8}{2}+\frac{k^9}{9}$$

$$n=9,\quad S_n(k)=-\frac{3k^2}{20}+\frac{k^4}{2}-\frac{7k^6}{10}+\frac{3k^8}{4}-\frac{k^9}{2}+\frac{k^{10}}{10}$$

由此結果，我們有下面三個猜測 [3]：

- $S_n(k)$ 為一 k 的 $n+1$ 次多項式，其首項係數為 $\dfrac{1}{n+1}$ ，
- $S_n(k)$ 的常數項為 0，亦即 $S_n(0)=0$，
- $S_n(k)$ 的 k^n 項之係數為 $-\dfrac{1}{2}$。

很顯然的，若將前兩項合併再經由實驗一(c)之結果確認，可得下面的猜測。 如上所言這就是Jacques Bernoulli的慧眼所已經觀察出來的東西。

【猜測】 存在唯一的一個首項係數為1 之 n 次多項式 $B_n(x)$ 使得

$$S_n(k)=1^n+2^n+3^n+\cdots+(k-1)^n=\int_0^k B_n(x)\,dx。\tag{2}$$

怎麼證明這個猜測呢？其實在前面所提到的登山鐵道之辦法裏已暗藏著證明的玄機。且看：

$$(j+1)^{n+1}-j^{n+1}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}j^i,$$

將對應於 $j=0,1,2,\cdots,k-1$ 的 k 個等式相加， 等式的左方對消之後只剩 k^{n+1}，而等式的右方則為 $S_i(k)$ 的線性組合。如下所示：

$$k^{n+1}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}S_i(k)=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+1}{i}S_i(k)+(n+1)S_n(k)。$$

所以我們有 $S_n(k)$ 的遞迴公式如下：

$$S_n(k)=\frac{1}{n+1}k^{n+1}-\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+1}{i}S_i(k)。\tag{3}$$

透過這個遞迴公式，利用數學歸納法，很容易的我們就可以證明上面的猜測都是對的(請動手證明看看吧!)，換句話說這些猜測其實都是定理。 所以我們的目標現在已變成：

$$\boxed{\text{找出 } B_n(k) \text{ 的公式}}$$

[3]其實合併起來就是前面的 (1) 式所要表達的內容。

當然由 (2) 及 (3) 式，我們馬上可得到一個 $B_n(k)$ 的遞迴公式如下：

$$B_n(k) = k^n - \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+1}{i}B_i(k) \text{ 。}$$

然而這並不是我們所要的，所以必須另起爐灶。我們最高的指導原則是 「回歸源頭」，因為唯有如此，靈感的活水才會不斷流出來。 「問渠那得清如許，唯有源頭活水來。」很顯然的，(2) 式就是這一切的源頭，且看下面的實驗：

4 實驗二：Bernoulli 多項式 $B_n(x)$

由定義馬上可以看出 Bernoulli 多項式必定會滿足下面的等式：

$$\int_k^{k+1} B_n(x)\,dx = k^n \text{ 。} \tag{4}$$

事實上，對任何正整數 n，存在唯一的一個首項係數為1 之 n 次多項式滿足這個方程式，而其中的 k可以是任何的數 (不僅限 於正整數而已) 。

(a) 用 MATHEMATICA 中符號演算的功能， 透過公式 (4) 計算 $B_n(x)$，
$n = 1, 2, 3, \cdots, 9$。

```
In[4]:= B[n_,x_]:=Sum[B[i]*x^i,{i,0,n-1}]+x^n
poly[n_]:=Series[Integrate[B[n,x],{x,k,k+1}]-k^n,{k,0,n}]
m=MatrixForm[Table[{sols=Solve[LogicalExpand[poly[i]==0]],
B[i,x]/.sols[[1]]}, {i,1,9}]]
```

(b) 請畫出 $B_n(x),\ n = 1, 2, 3, \cdots, 9$ 的圖形。
(注意 $B_n(x) =$ `m[[1,n]][[2]]`)：

```
In[5]:= {Plot[m[[1,1]][[2]],{x,-3,3},PlotStyle->Hue[.1]],
Plot[m[[1,2]][[2]],{x,-3,4},PlotStyle->Hue[.2]],
Plot[m[[1,3]][[2]],{x,-3,3},PlotStyle->Hue[.3]],
Plot[m[[1,4]][[2]],{x,-3,3},PlotStyle->Hue[.4]],
Plot[m[[1,5]][[2]],{x,-3,3},PlotStyle->Hue[.5]],
Plot[m[[1,6]][[2]],{x,-3,3},PlotStyle->Hue[.6]],
Plot[m[[1,7]][[2]],{x,-3,3},PlotStyle->Hue[.7]],
Plot[m[[1,8]][[2]],{x,-3,3},PlotStyle->Hue[.8]],
Plot[m[[1,9]][[2]],{x,-3,3},PlotStyle->Hue[.9]]}
Show[GraphicsArray[{{p1,p2,p3},{p4,p5,p6},{p7,p8,p9}}]]
```

或是放在同一座標平面上

```
In[6]:= Plot[{m[[1,1]][[2]],m[[1,2]][[2]],m[[1,3]][[2]],
m[[1,4]][[2]],m[[1,5]][[2]],m[[1,6]][[2]],
m[[1,7]][[2]],m[[1,8]][[2]],m[[1,9]][[2]]},{x,-3,4},
PlotStyle->{GrayLevel[.0],GrayLevel[.5],RGBColor[.5,0,0],
RGBColor[1,0,0],RGBColor[0,.5,0],RGBColor[0,1,0],
RGBColor[0,0,.5],RGBColor[0,0,1],RGBColor[1,1,0]}]
```

(c) 由這些計算或圖形，你能看出一般 $B_n(x)$ 的公式嗎？困難何在？

5 實驗二之結果與分析

在實驗二中，我們試著要由前面幾個多項式 $B_n(x),\ n=1,2,\cdots,9$ 及其圖形來預測其一般的公式。且看：

$$
\begin{aligned}
B_1(x) &= x-\frac{1}{2},\\
B_2(x) &= x^2-x+\frac{1}{6},\\
B_3(x) &= x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x,\\
B_4(x) &= x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30},\\
B_5(x) &= x^5-\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3-\frac{1}{6}x,\\
B_6(x) &= x^6-3x^5+\frac{5}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{42},\\
B_7(x) &= x^7-\frac{7}{2}x^6+\frac{7}{2}x^5-\frac{7}{6}x^3+\frac{1}{6}x,\\
B_8(x) &= x^8-4x^7+\frac{14}{3}x^6-\frac{7}{3}x^4+\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{30},\\
B_9(x) &= x^9-\frac{9}{2}x^8+6x^7-\frac{21}{5}x^5+2x^3-\frac{3}{10}x\text{。}
\end{aligned}
$$

但不管由其形式或圖形 ，實在是歸納不出什麼東西來。 目前我們還沒有用到任何分析中較重要的結果，所以我們不妨先詳細觀察一下公式 (4) ，其左邊是 $B_n(x)$ 在區間 $[k,k+1]$的定積分，右邊則是 k^n；所以可看成是 k 的函數。兩邊同時對 k來微分， 微積分基本定理告訴我們有

$$B_n(k+1)-B_n(k)=nk^{n-1}\text{。} \tag{5}$$

因此可得

$$
\begin{gathered}
[B_n(1)-B_n(0)]+[B_n(2)-B_n(1)]+\cdots+[B_n(k)-B_n(k-1)]\\
=n[0^{n-1}+1^{n-1}+2^{n-1}+\cdots+(k-1)^{n-1}],
\end{gathered}
$$

化簡之後我們有

$$\frac{B_n(k)-B_n(0)}{n}=S_{n-1}(k)=\int_0^k B_{n-1}(x)\,dx\text{。} \tag{6}$$

所以得到相鄰兩個 Bernoulli 多項式的關係如下：

$$B_n(x)=n\int_0^x B_{n-1}(t)dt+B_n(0), \tag{7}$$

這幾乎是 $B_n(x)$ 的一個一階遞迴公式。 另一方面，方程式 (6) 中的第一個等式告訴我們下面的公式：

$$S_n(k)=\frac{B_{n+1}(k)-B_{n+1}(0)}{n+1}\text{。} \tag{8}$$

由實驗二我們知道

$$B_9(x) = x^9 - \frac{9}{2}x^8 + 6x^7 - \frac{21}{5}x^5 + 2x^3 - \frac{3}{10}x,$$

如果我們得知 $B_{10}(0) = \dfrac{5}{66}$，那麼要找 $B_{10}(x)$ 只需將 $B_9(x)$ 積分後乘以 10，再加上 $\dfrac{5}{66}$ ：

$$\begin{aligned} B_{10}(x) &= 10\left(\frac{1}{10}x^{10} - \frac{1}{2}x^9 + \frac{3}{4}x^8 - \frac{7}{10}x^6 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{20}x^2\right) + \frac{5}{66} \\ &= x^{10} - 5x^9 + \frac{15}{2}x^8 - 7x^6 + 5x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{66} \text{。} \end{aligned}$$

所以如果我們知道每個多項式 $B_n(x)$ 的常數項：

$$B_1(0) = -\frac{1}{2}, \quad B_2(0) = \frac{1}{6}, \quad B_3(0) = 0, \cdots,$$

公式 (7) 就提供了一個管道，可以依次求出你所需要的 Bernoulli 多項式。這些常數項 $B_n(0)$ 我們就稱為 Bernoulli 數，以符號 B_n 表示之：

$$B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_5 = 0,\ B_6 = \frac{1}{42},\ B_7 = 0, \cdots \text{。}$$

微積分預習測驗14

姓名：____________ 學號：____________ 分數：6 5 4 3 2

其實，上面的計算與觀察有點把我們引導到一個錯誤的方向。 假如我們先不去管 Bernoulli 數的值，反而使我們更容易得到 Bernoulli 多項式 $B_n(x)$ 的公式。請看下面的實驗：

6 實驗三：Bernoulli多項式 $B_n(x)$的公式

還記得我們的 $B_1(x)$ 等於 $x + B_1$ 嗎？將公式 (7) 寫成

$$B_n(x) = n\int_0^x B_{n-1}(t)dt + B_n \text{。} \tag{9}$$

(a) 透過公式 (9)，請用 MATHEMATICA 由 $B_1(x) = x+B_1$開始， 依次算出 $B_n(x)$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$，係數請用 Bernoulli 數表示之。

```
In[7]:= B1[x_]:=x+B1;
B2[x_]:=Expand[2*Integrate[B1[t],{t,0,x}]+B2];
B3[x_]:=Expand[3*Integrate[B2[t],{t,0,x}]+B3];
B4[x_]:=Expand[4*Integrate[B3[t],{t,0,x}]+B4];
B5[x_]:=Expand[5*Integrate[B4[t],{t,0,x}]+B5];
Print["B1(x) = ", B1[x] ]
Print["B2(x) = ", B2[x] ]
Print["B3(x) = ", B3[x] ]
Print["B4(x) = ", B4[x] ]
Print["B5(x) = ", B5[x] ]
```

(b) 由這些計算，你能看出一般 $B_n(x)$ 的公式嗎？

(c) 若用 B^n 來代替 B_n ，你有什麼新發現呢？

7 實驗三之結果與分析：撥雲霧見青天

現在終於撥開雲霧看見青天了，上面的實驗告訴我們前五個 Bernoulli 多項式其形式分別為：

$$\begin{aligned}
B_1(x) &= x + B_1, \\
B_2(x) &= x^2 + 2B_1x + B_2, \\
B_3(x) &= x^3 + 3B_1x^2 + 3B_2x + B_3, \\
B_4(x) &= x^4 + 4B_1x^3 + 6B_2x^2 + 4B_3x + B_4, \\
B_5(x) &= x^5 + 5B_1x^4 + 10B_2x^3 + 10B_3x^2 + 5B_4x + B_5\text{。}
\end{aligned}$$

這些形式乍看之下不就是二項式定理嗎？ 仔細觀察則不然，就差那麼一點點而已，若將式中的 B_i 換成 B^i 那就完美無缺了。透過公式 (9)，利用數學歸納法可得 $B_n(x)$ 的公式如下：

$$B_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i\, x^{n-i}\ 。 \tag{10}$$

將公式 (8) 與公式 (10) 合在一起，我們終於得到一個 $S_n(k)$ 的公式：

$$\boxed{S_n(k) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} B_i\, k^{n+1-i}}$$

此公式亦可由公式 (2) 與公式 (10) 導出來，如下所示：

$$\begin{aligned} S_n(k) &= \int_0^k B_n(x)\, dx \\ &= \int_0^k \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i\, x^{n-i}\, dx \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{B_i\, k^{n+1-i}}{n+1-i} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} B_i\, k^{n+1-i}\ 。 \end{aligned}$$

剩下的問題就是怎麼樣計算這些 Bernoulli數。根據定義我們有：

$$B_n = B_n(0) = S_n'(0)。$$

在 $S_n(k)$ 的遞迴公式 (3) 中，將等式兩側對 k 來微分，可得如下：

$$\begin{aligned} & (n+1)B_n(k) = (n+1)k^n - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+1}{i} B_i(k) \\ & \Longrightarrow (n+1)B_n(0) = (n+1)0^n - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+1}{i} B_i(0) \\ & \Longrightarrow B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+1}{i} B_i\ 。 \end{aligned}$$

上式即 Bernoulli 數的遞迴公式。此遞迴公式亦可由方程式 (5) 得到。在 (5) 中，令 $k=0$，則 $B_n(1) - B_n(0) = 0$ 所以有

$$B_n = B_n(0) = B_n(1) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i, \tag{11}$$

因此可得

$$\begin{aligned} & B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} B_j = \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} B_i + B_{n+1} \\ & \iff \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} B_i = 0 \\ & \iff B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+1}{i} B_i\ 。 \end{aligned}$$

如上所觀察到的，形式上我們可將 $B_n(x)$，及 B_n 的公式寫成：

$$B_n(x) = (B+x)^n, \quad \text{及} \quad B_n = (B+1)^n,$$

再將右側按二項式定理展開並將式中所有的 B^i 都換成 B_i 即得公式 (10) 及公式 (11)，請參閱[1]。

8 實驗四：Bernoulli數B_n的遞迴公式

(a) 由 Bernoulli 數的遞迴公式， 試寫一程式來計算 $B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_{24}$。

```
In[8]:= B[n_]:= B[n]= -Sum[ Binomial[n+1,i]B[i]/(n+1) ,
{i,0,n-1}]; B[0]=1;
Table[{n,Expand[B[n]]},{n,10}]//MatrixForm
```

(b) 觀察 Bernoulli 數，你對 B_{2n+1} 有沒有任何猜測？

(c) 由 $S_n(k)$ 的遞迴公式 (3)， 試寫一程式來計算 $S_1(k),\ \cdots,\ S_{10}(k)$。

```
In[9]:= S[n_]:= S[n]=(k^(n+1) - Sum[ Binomial[n+1,i]S[i],
{i,0,n-1}])/(n+1); S[0]=k;
Table[{n,Expand[S[n]]},{n,10}]//MatrixForm
```

(d) 登山鐵道的辦法是否如引言中所提到的太不經濟呢？ 有了 MATHEMATICA的提昇，火車一變而成直昇機，你認為呢？

9 結語：BERNOULLI 的七分半鐘

由上面的計算得知： $B_0=1,\ B_1=-\frac{1}{2},\ B_2=\frac{1}{6},\ B_3=0,\ B_4=-\frac{1}{30},\ B_5=0,\ B_6=\frac{1}{42},\ B_7=0,\ B_8=-\frac{1}{30},\ B_9=0,\ B_{10}=\frac{5}{66}$。其實，Bernoulli 數的分子從 B_{14} 開始就會比分母大，而且愈來差距愈大。 請參閱[4] 之附表一，其中共列出 $B_2,\cdots,B_{124}$ 等 62個 Bernoulli 數。現在讓我們回到 JACQUES BERNOULLI 當年如何在七分半鐘算出前一千個自然數的十次方和的。我們有

$$\begin{aligned} S_{10}(k) &= \frac{1}{11}\sum_{i=0}^{10}\binom{11}{i}B_i\,k^{11-i} \\ &= \frac{1}{11}(k^{11}+11B_1k^{10}+55B_2k^9+165B_3k^8+330B_4k^7+462B_5k^6 \\ &\quad +462B_6k^5+330B_7k^4+165B_8k^3+55B_9k^2+11B_{10}k+B_{11}) \\ &= \frac{1}{11}k^{11}-\frac{1}{2}k^{10}+\frac{5}{6}k^9-k^7+k^5-\frac{1}{2}k^3+\frac{5}{66}k\text{。} \end{aligned}$$

所以得到[4]

$$1^{10}+2^{10}+\cdots+1000^{10} = 10^{30}+\frac{1}{11}10^{33}-\frac{1}{2}10^{30}+\frac{5}{6}10^{27}-10^{21}+10^{15}-\frac{1}{2}10^9+\frac{5}{66}10^3,$$

這只是個簡單的小學算術問題而已。請看：

[4]實際演算時，技巧上我們將對應於 $k=1001$的那一項 $(k-1)^{10}=1000^{10}=10^{30}$ 獨立出來，所以代入公式的k就少了 1 變成$k=1000=10^3$。如此一來就使得整個演算可以在半刻鐘之內完成。

```
1 00000 00000 00000 00000 00000 00000.00
+ 90 90909 09090 90909 09090 90909 09090.90
-    50000 00000 00000 00000 00000 00000.00
+       83 33333 33333 33333 33333 33333.33
-             10 00000 00000 00000 00000.00
+                    1 00000 00000 00000.00
-                              5000 00000.00
+                                      75.75
------------------------------------------
91 40992 42414 24243 42424 19242 42500
```

七分半鐘是綽綽有餘的(請參閱[2] 之附錄A)。

References

[1] Apostol, T.: Introduction to Analytic Number Theory, Undergraduate Texts in Math., Springer-Verlag, New York, 1986 (Third Printing).

[2] Bressoud, D.: A Radical Approach to Real Analysis, MAA, Washington D.C., 1994.

[3] Ireland, K. and Rosen, M.: A Classical Introduction to Modern Number Theory, Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, New York, 1982.

[4] Washington, L.: Introduction to Cyclotomic Fields, 2nd ed., Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, New York, 1997.