微積分預習測驗12

姓名：____________ 序號：____ 學號：____________ 分數：6 5 4 3 2

我們透過 Mathematica 程式的環境，設計了一個實驗將交錯調和級數重組並觀察其和是否會產生變化； 另外我們也觀察兩個類似的例子，看看能否歸納出和變化或不變化的規則。

1 引言：級數之重組

現在我們一起來觀察：若將級數重組，重組之後，其收斂性會改變嗎？ 而級數和又會是怎麼樣的一個變化的情形呢？所謂的級數重組，其定義如下：

【定義】若 $\{k_n\}, n = 1, 2, 3, \cdots$ 為一從正整數集 $\mathbb{N}$到正整數集 $\mathbb{N}$ 之一對一 的對應，令

$$b_n = a_{k_n}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots \text{，}$$

我們稱級數 $\sum b_n$為原級數 $\sum a_n$ 的一個重組。

首先我們一起觀察：若將交錯調和級數重組，重組之後，其收斂性會改變嗎？ 而級數和又會是怎麼樣的一個變化的情形呢？

2 實驗一：交錯調和級數之重組

(a) 用Mathematica 寫一程式來觀察交錯調和級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots$$

重組(如 r 個正奇數項接著 s 個負偶數項) 之後的收斂性，並分析其和變化的趨勢走向如何。

(b) 先定義一重組，其規則為 r個正奇數項接著 s個負偶數項然後再重複。 令其部份和數列為 $\{S_1, S_2, S_3, \cdots\}$ ，則我們定義這個部份和 數列的前 n項為 rearrange$[n, r, s]$，其程式如下：

```
In[5]:=  rearrange[n_,r_,s_]:=Block[{sum,even,odd,list,i},
sum = 0; odd = 1; even = 2; list = {}; i=1;
While[ i <= n, Do[ sum = N[sum + 1/odd,10];
odd = odd + 2; i++;
AppendTo[list,sum], {r} ];
Do[ sum = N[sum - 1/even ,10];
even = even + 2; i++;
AppendTo[list,sum], {s} ];  ];
Return[list]]
```

所以 rearrange[10,2,1]指的就是下面這個數列：

$$\{\quad 1,\quad 1+\tfrac{1}{3},\quad 1+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2},\quad 1+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5},\quad 1+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7},$$

$$1+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{4},\ 1+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9},\ 1+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{11},$$

$$1+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{11}-\tfrac{1}{6},\quad 1+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{11}-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{13}\quad\}$$

(c) 在各種不同的 r, s值中，畫出部份和的前 n項之描點圖。 首先固定 $s = 1$並觀察當 $r = 1, 2, 3, \cdots 9$ 變大時時， 其對應的級數和之變化的情形如何。

```
In[6]:= {p11=ListPlot[Table[rearrange[10000,1,1]]],
p21=ListPlot[Table[rearrange[10000,2,1]]],
p31=ListPlot[Table[rearrange[10000,3,1]]],
p41=ListPlot[Table[rearrange[10000,4,1]]],
p51=ListPlot[Table[rearrange[10000,5,1]]],
p61=ListPlot[Table[rearrange[10000,6,1]]],
p71=ListPlot[Table[rearrange[10000,7,1]]],
p81=ListPlot[Table[rearrange[10000,8,1]]],
p91=ListPlot[Table[rearrange[10000,9,1]]]};
Show[GraphicsArray[{{p11,p21,p31},
{p41,p51,p61},{p71,p81,p91}}]]
```

注意，其實 $p11$就是原來的交錯調和級數之部分和數列的描點圖。 上面的輸出 `Out[6]` 結果，請見圖。

(d) 其次固定 $r = 1$並觀察當 $s = 1, 2, 3, \cdots 9$ 變大時時， 其對應的級數和之變化的情形如何。

```
In[7]:= {p11=ListPlot[Table[rearrange[10000,1,1]]],
p12=ListPlot[Table[rearrange[10000,1,2]]],
p13=ListPlot[Table[rearrange[10000,1,3]]],
p14=ListPlot[Table[rearrange[10000,1,4]]],
p15=ListPlot[Table[rearrange[10000,1,5]]],
p16=ListPlot[Table[rearrange[10000,1,6]]],
p17=ListPlot[Table[rearrange[10000,1,7]]],
p18=ListPlot[Table[rearrange[10000,1,8]]],
p19=ListPlot[Table[rearrange[10000,1,9]]]};
Show[GraphicsArray[{{p11,p12,p13},
{p14,p15,p16},{p17,p18,p19}}]]
```

注意，其實 $p11$就是原來的交錯調和級數之部分和數列的描點圖。 上面的輸出 `Out[7]` 結果，請見圖。

3 交錯調和級數重組之分析

4 實驗二：另兩個級數重組的觀察

(a) 衆所周知

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots \text{。}$$

仿上法，請分析此級數重組後和的變化情形。

(b) 交錯幾何級數之重組

觀察交錯幾何級數

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + - \cdots \text{。}$$

仿上法，請分析此級數重組後和的變化情形。

5 綜合分析：級數重組定理

重組之後和改變了，而且變化無常$\cdots$

【級數重組定理(Riemann)】 假設 $\sum a_n$ 為一條件收斂之無窮級數。若 $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq \infty$, 則存在一重組 $\sum a_n{}'$ 其部份和數列為 $\{s_n{}'\}$ 使得

$$\liminf s_n{}' = \alpha, \quad \limsup s_n{}' = \beta \text{。}$$