微積分實驗預習測驗09

姓名：______________ 學號：________________________ 分數：____________

隨著華理斯 (Wallis)的舞步，我們觀察積分值 $\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^q\,dx$ 的倒數：

$$f(p,q)=\left(\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^q\,dx\right)^{-1}。$$

首先我們探討當 $p,q\in\mathbb{N}$為正整數時，函數 $f(p,q)$的一些 美妙的性質。其次我們觀察數列：

$$\left\{f\left(\frac{1}{2},\frac{q}{2}\right)\right\}_{q=-1}^{\infty},$$

可得到一關於 π的不等式， 並進而導出 π的無限乘積公式。最後，我們用同樣的技巧，由觀察另一遞增數列：

$$\left\{f\left(\frac{1}{3},\frac{q}{3}\right)\right\}_{q=-1}^{\infty},$$

得到一關於積分值 $\int_0^1 (1-x^3)^{\frac{1}{3}}\,dx$ 的無限乘積公式。

1 引言：站在巨人的肩膀上

牛頓說過：「如果我可以看得比別人更遠，那是由於我站在巨人的肩膀上 (If I have seen a little farther than others it is because I have stood on the shoulders of giants)」，他所說的巨人之一就是華理斯[1]。 現在我們就與巨人同行，一起來探討老少皆知的圓周率[2]。

π 乃是單位圓之面積，若將圓心放置在座標平面的原點， 則在第一象限的四分之一圓的面積為

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx。$$

[1]華理斯 (John Wallis, 1616-1703) 英國數學家[11] ，以他在微積分上的前瞻性工作而聞名。 在他的《無窮微量的算術(Arithmetica Infinitorum)》(1655)中，他把 $\frac{\pi}{4}$ 表示成一無窮級數來計算 π。 他也是第一個解釋指數如 x^0, x^{-n} 及 $x^{\frac{n}{m}}$ 的人，且引用 ∞ 為無限大的符號。

[2]對所有的圓， 其圓周的長度除以直徑的長度都是一樣的，這個比值就是所謂的圓周率。 1706年，威爾斯作家 William Jones首次用 π這個符號來表示之。 古代對 π的估計值包括 3(舊約聖經)、$\frac{25}{8}$ (巴比倫)、 $\frac{256}{81}$(埃及)、$\frac{22}{7}$(希臘)、 $\frac{355}{113}$(中國)及$\sqrt{10}$ (印度)。在1429年阿拉伯數學家 Al-Kashi算出了精確至小數點16位的 π值。 目前已可算出百萬小數位。π在1767年被蘭伯特 Johann Heinrich Lambert (1728–1777) 證明為無理數，而在1882年才被林德曼 Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852–1939) 證明為超越數。

任何計算此一定積分的方法，就提供了我們一個計算 π的方法。 華理斯的才華就展現在他決定先觀察類似的積分上：

$$\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^q\,dx。$$

首先，我們計算 $q=0,1,2,3$時，其積分值分別為：

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^0\,dx &= 1，\\
\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^1\,dx &= \frac{1}{p+1}，\\
\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^2\,dx &= \frac{2}{(p+1)(p+2)}，\\
\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^3\,dx &= \frac{6}{(p+1)(p+2)(p+3)}。
\end{aligned}$$

顯而易見，展現在我們眼前的形式或規則， 讓我們輕而易舉的可以猜出下一個公式為：

$$\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^4\,dx = \frac{4!}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}。$$

因而，當 q 為一正整數時，此積分值必為

$$\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^q\,dx = \frac{q!}{(p+1)(p+2)\cdots(p+q)}。$$

再仔細思考一下，原來此數乃是二項式展開式係數的倒數：

$$\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^q\,dx = \frac{p!\,q!}{(p+q)!} = \binom{p+q}{q}^{-1} = \binom{p+q}{p}^{-1}。$$

所以若將這些積分值倒數過來，就都變成自然數了：

$$\left(\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^q\,dx\right)^{-1} = \binom{p+q}{q} \in \mathbb{N}。$$

因此之故，我們就跟隨著Wallis來一起觀察這個積分值的倒數，姑且稱之為 $f(p,q)$，所以我們有下面的定義及猜測。

【定義】對任意的 $p \neq 0, q \in \mathbb{R}$，我們定義

$$f(p,q) = \left(\int_0^1 (1 - x^{\frac{1}{p}})^q \, dx \right)^{-1} 。$$

為了方便起見，我們定義 $f(0,q) = 1 \; \forall q$， 這與上面的公式是一致的。顯而易見的，我們也有 $f(p,0) = 1 \; \forall p$。

【猜測】對任意的 $p, q \in \mathbb{N}$ 我們有

$$f(p,q) = \binom{p+q}{q} = \binom{p+q}{p} 。$$

2 實驗一：函數值 $f(p,q),\ p,q \in \mathbb{N}$ 的美妙性質

首先讓我們透過 Mathematica 來確認上述的現象並觀察 p, q 為正整數時函數 $f(p,q)$ 之值變化的情形。

(a) 首先在 Mathematica中定義函數 $f(p,q)$如下：

```
In[2]:= f[p_,q_]:=Integrate[(1-x^(1/p))^q,{x,0,1}]^(-1);
```

(b) 用 Mathematica 製作一個　8階方陣 $(f(p,q))$； $p, q = 0, 1, 2, \cdots, 7$。

```
In[3]:= m1=Table[f[p,q],{p,1,7},{q,0,7}];
        Prepend[m1,{1,1,1,1,1,1,1,1}]//MatrixForm
```

(c) 這些數是否似曾相識？何處見過其倩影芳蹤？

(d) 在上面的方陣中， $f(p,q-1)$ 位於 $f(p,q)$的左側，而 $f(p-1,q)$則在 $f(p,q)$ 的上方。觀察此三元素可得 $f(p,q-1) + f(p-1,q) = f(p,q)$。 或

$$f(p,q) - f(p,q-1) = f(p-1,q) 。$$

此公式是否對所有的 p, q 都成立呢？試証明之！

(e) 上面的方陣中是否有任何的對稱性？可得何公式？試証明之！

(f) 觀察 $g(p,q)=\dfrac{f(p,q)}{f(p,q-1)}$，有何特殊的形式圖樣顯示在你眼前？

```
In[4]:= g[p_,q_]:=f[p,q]/f[p,q-1];
        k1=Table[g[p,q],{p,1,7},{q,1,7}];
        Prepend[k1,{1,1,1,1,1,1,1}]//MatrixForm
```

(g) 所以在同一列中 (相同的 p值) 相鄰兩項之差的公式在 (d)， 而其商的公式在 (f)，試証明 (f)中的公式對所有的 p,q也都成立！

(h) 試由商的公式導出差的公式。

3 實驗二：π的無限乘積公式之探討

上面所作的跟 π 扯不上任何的關係。我們知道 $f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{4}{\pi}$， 其實這就是一開始所看到的那個積分值的倒數，亦即 π 出現在當 p,q 是半整數時。 所以就讓我們進一步來觀察當 $p,q\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}$ 時 $f(p,q)$ 之值變化的情形如何。

(a) 用 Mathematica製作一 $f(p,q)$的表格， $p,q=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4$。

```
In[5]:= m2=Table[f[p,q],{p,1/2,4,1/2},{q,0,4,1/2}];
        Prepend[m2,{1,1,1,1,1,1,1,1,1}]//MatrixForm
```

(b) 觀察一下 $f(p,q)$與 $f(p,q-1)$之差的公式與商的公式是否仍然成立？ 對稱公式$f(p,q)=f(q,p)$又如何呢？

```
In[6]:= g[p_,q_]:=f[p,q]/f[p,q-1];
        k2=Table[g[p,q],{p,1/2,3,1/2},{q,1,4,1/2}];
        Prepend[k2,{1,1,1,1,1,1,1}]//MatrixForm
```

(c) 觀察對應於 $p=\dfrac{1}{2}$的那一列的數，可得一有趣的遞增數列

$$\left\{f\left(\frac{1}{2},\frac{q}{2}\right)\right\}_{q=-1}^{\infty}$$

由此遞增數列，可得到一不等式列作為 π的有理數近似值。

```
In[7]:= Table[f[1/2,q],{q,-1/2,10,1/2}]
        Plot[f[1/2,q],{q,0,100000}]
```

(d) 由此遞增數列也可得到Wallis的不等式列

$$\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)} < \frac{4\cdot 6\cdot 8\cdots(2n)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)} \times \frac{4}{\pi} < \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$$

(e) 由上面的不等式，試著導出下列不等式

$$\frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots(2n)^2}{1\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2n-1)^2\cdot(2n+1)} < \frac{\pi}{2} < \frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots(2n-2)^2\cdot(2n)^2}{1\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2n-1)^2\cdot 2n}$$

(f) 試証明，透過夾擠定理由此可得 Wallis的無限乘積公式

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdots\cdots\text{。}$$

(g) 試証明上述無限乘積的第 k 對分數為 $\dfrac{4k^2}{4k^2-1}$，所以我們有

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{4k^2}{4k^2-1}\text{ 。}$$

(h) 用 MATHEMATICA算出兩倍的上述無限乘積

```
In[8]:= wallis[n_]:=2 NProduct[4k^2/(4k^2-1),{k,1,n}]
```

請提出你對此一無限乘積是否會趨近於某一定值的意見。

(i) 需要取多大 的 n，才能精確到小數點之後第三位？

(j) 如果要改良其精確度，可將其上下限平均一下。試証明其平均值為

$$\frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots(2n)\cdot(2n+\frac{1}{2})}{1\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2n-1)^2\cdot(2n+1)}$$

(k) 現在需要取多大的 n，才能精確到小數點之後第三位？

4 實驗三：積分 $\int_0^1 (1-x^3)^{\frac{1}{3}}\,dx$ 無限乘積公式之探討

依樣畫葫蘆，試找出一無窮乘積趨近於下列的定積分

$$\int_0^1 (1-x^3)^{\frac{1}{3}}\,dx\text{。}$$

提示：先建表 $f(\frac{1}{3},q);\ p,q=-\frac{1}{3},0,\frac{1}{3},\cdots,6$ 再觀察 數列

$$\left\{f\left(\frac{1}{3},\frac{q}{3}\right)\right\}_{q=-1}^{\infty}$$

變化的情形。

```
In[9]:= Table[f[1/3,q],{q,-1/3,6,1/3}]
```

5 分析

1. 用代換法 (令 $u=(1-x^{\frac{1}{p}})^q$) 來證明

$$\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^q\,dx=\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{q}})^p\,dx$$

2. 將 $\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^q\,dx$寫成

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})(1-x^{\frac{1}{p}})^{q-1}\,dx &= \int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^{q-1}\,dx-\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^{q-1}x^{\frac{1}{p}}\,dx\\ &= \int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^{q-1}\,dx+p\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^{q-1}\frac{-x^{\frac{(1-p)}{p}}}{p}x\,dx\end{aligned}$$

再用部份積分的方法於第二個積分可得

$$\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^q\,dx=\frac{q}{p+q}\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^{q-1}\,dx$$

3. 我們有下列的結果

$$\int_0^1 (1-x^3)^{\frac{1}{3}}\,dx=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{11}{10}\cdots=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(3k+1)^2-1}{(3k+1)^2}\text{。}$$

6 Mathematica 指令簡介

最後我們將此章用過的指令按字母順序介紹一下。

- `AspectRatio->1/1` 圖形中高與寬的比例，高/寬，預設值為1/GoldenRatio。
- `AxesLabel->{"x","y"}]` 座標軸的名稱，分別為 x-軸與 y-軸。
- `Integrate[`f, $\{x, xmin, xmax\}$`]` 函數 f在區間 $[xmin, xmax]$的定積分之精確值。
- `MatrixForm[`$list$`]` 將串列 `$list$`的元素用矩陣的形式列印出來。
- `NProduct[`f, $\{i, imin, imax\}$`]` 這些 $f(i)$ 的乘積之近似值，i 值從 $imin$ 到 $imax$。

  `NProduct[`f, $\{i, imin, imax, di\}$`]` 這些 $f(i)$ 的乘積之近似值，i 值從 $imin$ 到 $imax$ ，其間距為 di。
- `Plot[`f, $\{x, xmin, xmax\}$`]` 函數 f 在區間 $[xmin, xmax]$ 的圖形。

  `Plot[`$\{f_1, f_2, \cdots\}$, $\{x, xmin, xmax\}$`]` 將函數 $f_1(x), f_2(x), \cdots$ 在區間 $[xmin, xmax]$ 的圖形放在同一個座標平面上。
- `Prepend[`$\{\}$, x`]` 將 x安放在串列 $\{\}$之前，成為此串列的第一個元素。
- `Table[`$expr$, $\{imax\}$`]` 產生一包含 $imax$個 $expr$ 的串列。

  `Table[`$expr$, $\{i, imax\}$`]` 產生一 $expr$ 之值的串列， i 值從 1到 $imax$。

  `Table[`$expr$, $\{i, imin, imax\}$`]` 產生一 $expr$之值的串列，i 值從 $imin$到 $imax$。

  `Table[`$expr$, $\{i, imin, imax, di\}$`]` 產生一 $expr$ 之值的串列， i 值從 $imin$ 到 $imax$ 其間距為 di。

  `Table[`$expr$, $\{i, imin, imax\}$, $\{j, jmin, jmax\}$`]` 產生一 $expr$ 之值的二維串列，i 值從 $imin$到 $imax$，而 j 值從 $jmin$到 $jmax$。

References

[1] Borwein, J.M./Borwein, P.B., Ramanujan and pi, Scientific American 258(2) (1988), 66-73. (中譯見數播第十三卷第二期)

`http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_20_1_03/index.html`

[2] Bressoud, David M. : A Radical Approach to Real Analysis, MAA, Washington D.C., 1994.

[3] Clapham, Christopher: A Concise Oxford Dictionary of Mathematics, Oxford University Press, Oxford/New York, 1990.

[4] Daintith, John/Nelson, R.D.: The Penguin Dictionary of Mathematics, Penguin Books Ltd., 1989.

[5] 余文卿，關於圓周率 π，數學傳播第十三卷第三期(51)，78年9月。

http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_13_3_05/index.html

[6] Gaylord, Richard J./Kamin, Samuel N./Wellin, Paul R.: Introduction to Programming with Mathematica, 1st Edition, Springer-Verlag New York, Inc., 1993.

[7] 洪萬生，中國 π 的一頁滄桑，科學月刊第八卷第五期，1977年5月。

http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_08_05_3/index.html

[8] 蔡聰明，瓦里斯公式及其相關的結果，科學月刊第二十七卷第五期，1996年5月。

http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_27_05_1/index.html

[9] 蔡聰明，圓與 π，科學月刊第二十七卷第六期，1996年6月。

http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_27_06_1/index.html

[10] 曹宏熙譯，雷馬紐冉 (Ramanujan)和 π，數學傳播第十三卷第二期(50)，78年6月，第70-79頁。

[11] 華理斯的生平事蹟，詳細計再請見 The MacTutor History of Mathematics archive之網站，其網址為：

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Wallis.html