# 微積分實驗預習測驗08

姓名：______________ 學號：_______________________ 分數：___________

估算函數值絕不簡單。初等微積分中，我們學過了切線或一次的估算公式； 我們就從這裡出發，來談談歐拉數與自然指數函數的最佳估算式。

## 1 費曼 PK 珠算

理查 ·費曼（Richard Feynman, 05/11/1918 – 02/15/1988）是二十世紀最著名的物理學家之一。 曾就讀于麻省理工、普林斯頓。二戰時曾參與曼哈頓計畫。 曾先後任教于康奈爾大學及加州理工學院。 1965年因其在量子電動力學方面的貢獻而獲得諾貝爾物理學獎。 費曼不僅善於思考，還善於教學，其《物理學講義》在全世界範圍内影響非常大， 物理學的學生和教師都從中受益良多。 他曾經到巴西訪問，在巴西的某個餐館裡吃飯，裡面只有他一個顧客，四個服務生在旁邊閒談。

巴西有不少日本僑民，費曼那天就碰到一個以賣算盤為生的日本人。 那個日本人走進餐館和服務生聊天，並且誇口説自己算加法比誰都快。 服務生們不信，他們看出費曼是個知識份子，就撮合費曼接受挑戰，費曼答應了。

第一次，服務生們一個個地報出數字，讓他們做連加運算， 結果費曼一敗塗地，因為日本人邊聽邊加，數字剛報完就算出了結果。

費曼對此提出抗議，並要求服務生把數字都寫下來再同時交給他們二人，結果日本人還是輕鬆獲勝。 因為他用算盤操作得實在是太快了。

日本人很高興，有些飄飄然，他要求繼續比乘法運算。 結果他又贏了，但是贏得不是特別多。日本人大概感到自己的技巧受到了挑戰，於是繼續要求比試除法。 費曼很高興地接受了，因為他已經意識到，問題越複雜，自己戰勝這個日本人的機率就越大。 果然不出費曼所料，兩人幾乎同時算出了結果。

日本人有些懊惱，看來他的自信心受到了打擊，於是他站起來大聲喊道：「立方根！」 這讓在場的人感到震驚，因為用算盤算立方根，可能是珠算裡最難的東西了。

他們比賽的是求1729.03的立方根，日本人口中念念有詞，兩手飛快地撥動算珠，而費曼卻只是坐著思考，然後在紙上寫下一個12，再接著，在紙上寫下12.002，而這時日本人才算出12。 日本人很焦急，繼續埋頭苦幹，又花了很久，才得出結果為12.0，而這時費曼已經寫出了12.00238。 日本人終於認輸，垂頭喪氣地走了。

其實，這個日本人能用珠算開立方根，足以説明其珠算技巧的高超， 但是費曼又為何能打敗這個日本珠算高手的呢？ 原因在於，這個日本人並沒有真正瞭解數字的奧秘，他學習珠算時， 只是機械地背下了很多口訣，並且將它們練習得非常熟練，但並

不明白為什麼會是這樣。 在運算比較簡單時，他可以憑藉自己飛速的操作贏得勝利，但是隨著運算的複雜，他所花的時間越來越多，而費曼卻明白很多運算的奧秘， 尤其是明白近似計算的原理，可以很輕易地用簡單的方法來解決。 當然，費曼承認題目中出的數字的確比較巧合，題目是`1729.03`， 而費曼知道12的立方是1728，因此答案是12多一點點。 1729.03比1728多出來1.03，按比例來說就是1.03/1728， 而費曼熟練地利用了自己在大學裡學的微積分知識而知道， 就很小的數而言，立方根超出的部分比例是底數超出部分比例的大約1/3， 因此他只需要算出1/1728，然後再乘12除以3即可， 即約為0.002，如果算1.03/1728再乘以4，便可得到結果約為0.00238。

總之，費曼具有一個學者應有的素質–不僅知其然， 還知其所以然，並能夠加以合理的應用，因此利用巧妙的方法打敗了這個珠算高手。

## 2 線性(一次)近似公式

當變數從 $a$ 微變成 $x$, 其變化 $\Delta x = x - a$ 導致函數值 $f(a)$ 的真正變化量為

$$\Delta f = f(x) - f(a)\,,$$

這差不多是導數倍 $f'(a)\Delta x = df$; 此乃所謂線性近似，導數幾意切線斜率； 因而又稱切線估算，此量 $df$ 何名？微分量也。

(a) 請說明費曼如何利用線性近似得到他所要的近似值 12.00238？

(b) 若你用此法在自然指數函數上 $f(x) = e^x$ ，其中 $a = 0, x = 1$; 如此利用線性近似得到歐拉數 $e$ 的近似值為何？請問這個近似值好嗎？問題在哪？

## 3 高次近似公式

所以當變數變化 $\Delta x$ 較大時，我們需要更高次的近似公式，此即泰勒多項式也。

(a) 請寫下自然指數函數 $f(x) = e^x$ 在 0 點的 $n$ 次泰勒多項式 $P_n(f;x)$ 。

(b) 用 $P_n(f,1)$ 來估算歐拉數 $e$, 此處 $n$ 為你學號所有位數相加後所得到的數； 請用 Mathematica 算出並告知精確到小數點後第幾位？

(c) 用同一個 $n$ 。請問 $P_n(f,x)$ 與自然指數函數 $f(x) = e^x$用 Mathematica 畫出的圖形在何區間難以分辨？

(d) 對正弦函數 $f(x) = \sin x$, 重複上述問題！ (若你的 $n$ 是偶數就加1)

(e) 對餘弦函數 $f(x) = \cos x$, 重複上述問題！ (若你的 $n$ 是奇數就加1)