

微積分實驗預習測驗07

姓名：_____ 學號：_____ 分數：_____

看完『一個更美的不等式』一文，然後觀察 $n!$ 與 $n^{n+t}e^{-n}$ 之比值的漸近行為

- (a) 首先將此比值改寫為 $\frac{n!e^n}{n^{n+t}}$ ，並用符號 $S[n, t]$ 表示之。

$$S[n_, t_] := n! E^n / n^{(n+t)}$$

- (b) 先選定一個介於 0 與 1 之間的定值 t ，然後觀察不同的 n 值對 $S[n, t]$ 的影響，當 n 越來越大， $S[n, t]$ 是否會趨近於某個定數？很自然的第一個想到要測試的 t 值乃是 0 與 1 的平均值 0.5，對較大的 n 值請列出 $S[n, 0.5]$ 之值。

```
Table[{n, S[n, 0.5]}, {n, 100, 1000, 100}] // MatrixForm
```

- (c) 因為我們所要觀察的是當 n 趨近於無窮大時 $S[n, 0.5]$ 的極限值，所以更好更快的一個方法是用函數圖形來處理。請畫出 $S[n, 0.5]$ 的圖形， $n \in [1, 100000]$ 。

```
Plot[S[x, 0.5], {x, 1, 10^5},  
      PlotStyle -> RGBColor[0, 1, 0]]
```

- (d) 如上，請分析當 $t = 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 0.9$ 其對應之數列

$$\{S(n, t)\}_{n=1}^{\infty}$$

的極限，用表列及圖示兩種方式來進行。

- (e) 分析上面各種不同之 t 值所得的結果。
(f) 可再觀察並分析其他不同之 t 值所得的結果。