微積分 C 下 (財金一) 預習測驗 02

姓名：________________ 系級：_______ 學號：____________________ 分數：____________

復習上禮拜四筆記並預習八章一節然後完成下列問題

1. 【定積分基本觀念】定積分的觀念源自求面積的問題，以窮盡法解決之。令 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 爲一函數。將區間 $[a,b]$ 分割成 n 個子區間 $[x_{j-1},x_j],\ j=1,2,3,\cdots,n$, 用符號 $\mathcal{P}=\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\}$ 表示這些分割點所成的集合並稱之爲區間 $[a,b]$ 的一個分割。在每一個子區間上，選取一點 $x_j^*\in[x_{j-1},x_j]$, 並形成黎曼和 $\sum_{j=1}^{n} f(x_j^*)\Delta x_j$, 其中 Δx_j 爲子區間 $[x_{j-1},x_j]$ 之長度。定義分割 $\mathcal{P}$ 的大小爲 $|\mathcal{P}|=\max_{j=1}^{n}\{\Delta x_j\}$。若下列極限值存在 $\lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{j=1}^{n} f(x_j^*)\Delta x_j$, 則我們說函數 f 在區間 $[a,b]$ 上是可積分的，並將此極限値稱之爲函數 f 在區間 $[a,b]$ 上的定積分且以符號 $\int_a^b f(x)\,dx$ 表示之。在實際的計算當中，通常我們將區間 $[a,b]$ 分割成 n 等分，因而 $\Delta x_j=(b-a)/n\ \forall j$, 故得 $x_j=a+j\cdot\frac{b-a}{n}\quad\forall 1\le j\le n$ 。選取 $x_j^*=x_j$, 所要計算的極限值變成

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} f(a+j\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n}$$

若函數 $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\{\text{正實數}\}$, 則定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 之幾何意義爲函數圖形 $y=f(x)$ 下方在區間 $[a,b]$ 上之區域的面積。

   (a) 定積分 $\displaystyle\int_0^4\sqrt{16-x^2}\,dx$ 之值爲 $\boxed{}$

   (b) 若函數 $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 擁有一個反導數 F, 則定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=$ $\boxed{}$

2. 【微積分基本定理】微分與積分的觀念，感覺上 (從幾何意義上來看) 好像是沒什麼關係。然而，令人驚奇的是這兩個觀念不僅有關係而且關係非常密切。所以貫穿其間關係的定理，理所當然的就稱之爲微積分基本定理。

   (a) 【微分形式】若 $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 爲一連續函數，則函數 $G(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt,\quad x\in[a,b]$ 在每一個 $x\in(a,b)$ 都是可微分的，而且 $G'(x)=$ $\boxed{}$ 。

   換句話說，若 f 的積分是 G 則 G 的微分就是 f 。口語的說，反應整體性質的積分是由反應局部性質的微分所決定。

   (b) 【積分形式】若 G 在 $[a,b]$ 上是可微分的，而且 $G'(x)=f(x)$ 爲 $[a,b]$ 上的連續函數，則 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=$ $\boxed{}$ 。

   換句話說，若 G 的微分是 f 則 f 的積分就是 G (或差一個常數)。口語的說，反應局部性質的微分是由反應整體性質的積分所決定。

3. 求下列定積分：

(a) $\displaystyle\int_0^5 x\sqrt{25-x^2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^5 \sqrt{25-x^2}\,dx$

4. 利用分部法求下列反導數：

(a) $\displaystyle\int xe^x\,dx$

(b) $\displaystyle\int x^3\ln x\,dx$

(c) $\displaystyle\int \ln x\,dx$