微積分 A 上第三次考試

系級：_____ 姓名：_____ 學號：_____ 分數：_____

100 分鐘–不准用計算器，每題 **5** 分超過 **100** 分以 **100** 分計

第一部分：單選題

1. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}(x+1)\,dx =$

(A) $\dfrac{16}{15}$ (B) 0 (C) 1 (D) 2 (E) $\dfrac{7}{5}$

---

2. $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{1+x}\,dx =$

(A) $\dfrac{21}{2}$ (B) 7 (C) $\dfrac{16}{3}$ (D) $\dfrac{14}{3}$ (E) $-\dfrac{1}{4}$

---

3. $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{|x|}{x}\,dx =$

(A) -3 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 不存在

---

4. 若 n 爲已知正整數，則滿足 $\displaystyle\int_1^k x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}$ 的 k 值爲

(A) 0 (B) $\left(\dfrac{2}{n}\right)^{1/n}$ (C) $\left(\dfrac{2n-1}{n}\right)^{1/n}$ (D) $2^{1/n}$ (E) 2^n

---

5. $\displaystyle\int_0^1 (1+x)e^{x^2+2x}\,dx =$

(A) $\dfrac{e^3}{2}$ (B) $\dfrac{e^3-1}{2}$ (C) $\dfrac{e^4-e}{2}$ (D) e^3-1 (E) e^4-e

---

6. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,dx =$

(A) $\dfrac{\pi}{4}-1$ (B) $1-\dfrac{\pi}{4}$ (C) $\dfrac{1}{3}$ (D) $\sqrt{2}-1$ (E) $\dfrac{\pi}{4}+1$

---

7. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x-4}{x^2}\,dx =$

(A) $-\dfrac{1}{2}$ (B) $\ln 2-2$ (C) $\ln 2$ (D) 2 (E) $\ln 2+2$

---

8. 若 $\displaystyle\int_1^2 f(x-c)\,dx = 5$ 其中 c 爲常數，則 $\displaystyle\int_{1-c}^{2-c} f(x)\,dx =$

(A) $5+c$ (B) 5 (C) $5-c$ (D) $c-5$ (E) -5

---

9. 假設 $g'(x)<0,\quad \forall x\geq 0$ 且 $F(x)=\displaystyle\int_0^x tg'(t)\,dt \quad \forall x\geq 0$。請問下列何者錯誤？

(A) F 之函數值皆爲非正 (B) F 在 $x>0$ 是連續的 (C) $F(x)=xg(x)-\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt$

(D) F 在 $x>0$ 是可微分的 (E) F 是遞增函數

---

10. 若 $f(x)=\begin{cases} x+1 & 當\, x<0, \\ \cos \pi x & 當\, x\geq 0, \end{cases}$ 則 $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx =$

(A) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}$ (B) $-\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\pi}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $-\dfrac{1}{2}+\pi$

---

11. $\displaystyle\int \arcsin x\,dx =$

(A) $\sin x-\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (B) $\dfrac{(\arcsin x)^2}{2}+C$ (C) $\arcsin x+\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(D) $x\arccos x-\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (E) $x\arcsin x-\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

---

12. $\displaystyle\int x\sqrt{4-x^2}\,dx =$

(A) $\dfrac{(4-x^2)^{3/2}}{3}+C$ (B) $-(4-x^2)^{3/2}+C$ (C) $\dfrac{x^2(4-x^2)^{3/2}}{3}+C$

(D) $-\dfrac{x^2(4-x^2)^{3/2}}{3}+C$ (E) $-\dfrac{(4-x^2)^{3/2}}{3}+C$

---

13. 函數 $\sqrt{x}$ 在區間 $[0,2]$ 之平均值爲

(A) $\dfrac{1}{3}\sqrt{2}$ (B) $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$ (C) $\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$ (D) 1 (E) $\dfrac{4}{3}\sqrt{2}$

---

14. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x-2}\,dx =$

(A) $-\ln\sqrt{2}$ (B) $-\dfrac{\ln\sqrt{2}}{2}$ (C) $\dfrac{1-\ln\sqrt{2}}{2}$ (D) $\ln\sqrt{2}$ (E) 以上皆非

第二部分：填充計算題

1. 【定積分基本觀念】定積分的觀念源自求面積的問題，以窮盡法解決之。令 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 爲一函數。將區間 $[a,b]$ 分割成 n 個子區間 $[x_{j-1},x_j],\ j=1,2,3,\cdots,n$, 用符號 $\mathcal{P}=\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\}$ 表示這些分割點所成的集合並稱之爲區間 $[a,b]$ 的一個分割。在每一個子區間上，選取一點 $x_j^*\in[x_{j-1},x_j]$, 並形成黎曼和 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} f(x_j^*)\Delta x_j$, 其中 Δx_j 爲子區間 $[x_{j-1},x_j]$ 之長度。定義分割 $\mathcal{P}$ 的大小爲 $|\mathcal{P}|=\max_{j=1}^{n}\{\Delta x_j\}$。若下列極限值存在 $\displaystyle\lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{j=1}^{n} f(x_j^*)\Delta x_j$, 則我們說函數 f 在區間 $[a,b]$ 上是可積分的，並將此極限值稱之爲函數 f 在區間 $[a,b]$ 上的定積分且以符號 $\int_a^b f(x)\,dx$ 表示之。在實際的計算當中，通常我們將區間 $[a,b]$ 分割成 n 等分，因而 $\Delta x_j=(b-a)/n\ \forall j$, 故得 $x_j=a+j\cdot\frac{b-a}{n}\quad \forall 1\leq j\leq n$。選取 $x_j^*=x_j$, 所要計算的極限值變成

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} f(a+j\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n}$$

若函數 $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\{正實數\}$, 則定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 之幾何意義爲函數圖形 $y=f(x)$ 下方在區間 $[a,b]$ 上之區域的面積。

(a) 定積分 $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$ 之值爲 $\boxed{}$

(b) 若函數 $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 擁有一個反導數 F, 則定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=$ $\boxed{}$

(c) 極限 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$ 之值爲 $\boxed{}$

2. 【微積分基本定理】微分與積分的觀念，感覺上(從幾何意義上來看)好像是沒什麼關係。然而，令人驚奇的是這兩個觀念不僅有關係而且關係非常密切。所以貫穿其間關係的定理，理所當然的就稱之爲微積分基本定理。

(a) 【微分形式】若 $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 爲一連續函數，則函數 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt,\quad x\in[a,b]$ 在每一個 $x\in(a,b)$ 都是可微分的，而且 $F'(x)=$ $\boxed{}$ 。

換句話說，若 f 的積分是 F 則 F 的微分就是 f 。口語的說，反應整體性質的積分是由反應局部性質的微分所決定。

(b) 【積分形式】若 F 在 $[a,b]$ 上是可微分的，而且 $F'(x)=f(x)$ 爲 $[a,b]$ 上的連續函數，則 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=$ $\boxed{}$ 。

換句話說，若 F 的微分是 f 則 f 的積分就是 F (或差一個常數)。口語的說，反應局部性質的微分是由反應整體性質的積分所決定。

(c) 令 $G(x)=\displaystyle\int_1^{x^2}\sqrt{16+t}\,dt,$ 則 $G'(3)$ 之值爲 $\boxed{}$ 。

3. 【定積分的計算】

(a) 定積分 $\displaystyle\int_0^2 3x\sqrt{4-x^2}\,dx$ 之值爲 $\boxed{}$ 。

(b) 定積分 $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}\,dx$ 之值爲 $\boxed{}$ 。

(c) 定積分 $\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx$ 之值爲 $\boxed{}$ 。

(d) 定積分 $\int_0^1 xe^x\,dx$ 之值爲 $\boxed{}$ 。

4. 【定積分的應用】

(a) 求函數圖形 $f(x) = \dfrac{x^4}{16} + \dfrac{1}{2x^2}$, $\quad x \in [1,2]$ 的長度。 $\boxed{}$

(b) 求在 $x = 0$ 與 $x = \frac{5\pi}{2}$ 之間，曲線 $y = x\sin x$ 與直線 $y = x$ 所包圍區域的面積。 $\boxed{}$