

微積分 A 上第二次考試

系級：_____ 姓名：_____ 學號：_____ 分數：_____

100分鐘—不准用計算器，每題4分超過100分以100分計

第一部分：單選題

1. 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 5n^3 + 7n - 11}{n^3 - 2n^2 + 1}$ 之值為
(A) -5 (B) -2 (C) 1 (D) 3 (E) 不存在

2. 極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 + 2x} - 3x)$ 之值為
(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) 不存在

3. 若 $f(x) = x^2\sqrt{2x-3}$ ，則 $f'(x) =$
(A) $\frac{x(3x-3)}{\sqrt{2x-3}}$ (B) $\frac{x^2}{\sqrt{2x-3}}$ (C) $\frac{x}{\sqrt{2x-3}}$ (D) $\frac{x(-x+3)}{\sqrt{2x-3}}$ (E) $\frac{x(5x-6)}{\sqrt{2x-3}}$

4. 若 $f(x) = (x^2 - 2x - 1)^{\frac{2}{3}}$ ，則 $f'(0) =$
(A) $\frac{4}{3}$ (B) 0 (C) $-\frac{2}{3}$ (D) $-\frac{4}{3}$ (E) -2

5. 若 $y^2 - 2xy = 16$ ，則導數 $\frac{dy}{dx}$ 為
(A) $\frac{x}{y-x}$ (B) $\frac{y}{y-x}$ (C) $\frac{y}{x-y}$ (D) $\frac{y}{2y-x}$ (E) $\frac{2y}{x-y}$

6. 若 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 3 \\ 9x - 18, & x \geq 3 \end{cases}$ ；則函數 f 在 $x = 3$
(A) 沒有定義 (B) 連續但不可微分 (C) 可微分但不連續 (D) 既不連續也不可微分 (E) 既連續又可微分

7. 若函數 f 處處連續且若 $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ ， $x \neq 2$ ；則 $f(2) =$
(A) -4 (B) -2 (C) 0 (D) 2 (E) 4

8. 對函數 $f(x) = x^4 - 2x^2$ 的圖形而言，下列何者錯誤？
(A) 在區間 $[-1, 0]$ 是遞增的 (B) 在 $x = 0$ 有相對極小 (C) 在區間 $[2, 5]$ 上彎 (concave up)
(D) 在區間 $[-0.5, 0.5]$ 下彎 (concave down) (E) 在區間 $[0, 1]$ 是遞減的

9. 函數 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 12$ 在區間 $[-2, 4]$ 的絕對極大發生在 $x =$
(A) 2 (B) 4 (C) 1 (D) 0 (E) -2

10. 若 $f(x) = e^{\tan^2 x}$ ，則 $f'(x) =$
(A) $e^{\tan^2 x}$ (B) $\sec^2 x e^{\tan^2 x}$ (C) $\tan^2 x e^{\tan^2 x - 1}$ (D) $2 \tan x \sec^2 x e^{\tan^2 x}$ (E) $2 \tan x e^{\tan^2 x}$

11. 若 $e^{f(x)} = 1 + x^2$ ，則 $f'(x) =$

- (A) $\frac{1}{1+x^2}$ (B) $\frac{2x}{1+x^2}$ (C) $2x(1+x^2)$ (D) $2x e^{1+x^2}$ (E) $2x \ln(1+x^2)$
-

12. 若 $y = 2, x = -3$ 分別是函數 $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ 圖形的水平漸進線和垂直漸進線，則 $a+c =$

- (A) -5 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 5
-

13. 請問跟曲線 $y = \frac{1}{2}x^2$ 相切於哪一點的切線會跟直線 $2x - 4y = 3$ 平行呢？

- (A) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ (B) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$ (C) $(1, -\frac{1}{4})$ (D) $(1, \frac{1}{2})$ (E) $(2, 2)$
-

14. 跟曲線 $y = x(1-2x)^3$ 相切於 $(1, -1)$ 的直線方程式為

- (A) $y = -7x + 6$ (B) $y = -6x + 5$ (C) $y = -2x + 1$ (D) $y = 2x - 3$ (E) $y = 7x - 8$
-

15. 若 $x^2 + y^2 = 25$ ，則在點 $(4, 3)$ ，導數 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 之值為

- (A) $-\frac{25}{27}$ (B) $-\frac{7}{27}$ (C) $\frac{7}{27}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) $\frac{25}{27}$
-

16. 多項式 $f(x)$ 擁有相對極大在 $(-2, 4)$ ，相對極小在 $(1, 1)$ ，相對極大在 $(5, 7)$ ；此外沒有其他臨界點。請問多項式 $f(x)$ 有多少根？

- (A) 一個 (B) 兩個 (C) 三個 (D) 四個 (E) 五個
-

17. 若 $f(x) = 1 + x^{\frac{2}{3}}$ ，請問下列何者錯誤？

- (A) f 是處處連續的函數 (B) f 在 $x = 0$ 時有極小 (C) 對所有的 x ，其導數 $f'(x)$ 都存在
(D) 對所有的 $x > 0$ ，其二階導數 $f''(x)$ 都是負的 (E) f 在區間 $(0, \infty)$ 是遞增的
-

18. 若函數 f 在封閉區間 $[-2, 2]$ 是連續的。如果 $f(-2) = 1$ 且 $f(2) = -1$ ，那麼中間值定理保證

- (A) $f(0) = 0$
(B) 至少可以找到介於 -2 與 2 之間的數 c 使得 $f'(c) = \frac{1}{7}$
(C) 對所有介於 -2 與 2 之間的數 x 恆有 $-1 \leq f(x) \leq 1$
(D) 至少可以找到介於 -1 與 1 之間的數 c 使得 $f(c) = \frac{1}{2}$
(E) 至少可以找到介於 -2 與 2 之間的數 c 使得 $f(c) = 0$
-

19. 假設投資 x 千元可生產芒果汁 $f(x) = 300x^{\frac{1}{2}}$ 瓶。若現有資金 40500 千元，請利用微分量估算可生產多少瓶的芒果汁？

- (A) 60000 (B) 60250 (C) 60375 (D) 60425 (E) 60374
-

20. 下列何者為函數 $f(x) = \sin x \cos x$ 的反導函數？

- I. $F(x) = \frac{\sin^2 x}{2}$ II. $G(x) = \frac{\cos^2 x}{2}$ III. $H(x) = \frac{-\cos(2x)}{4}$

- (A) 只有 I (B) 只有 II (C) 只有 III (D) 只有 I 跟 III (E) 只有 II 跟 III
-

21. 下列哪一個定積分之值等於 $\int_0^\pi \sin x \, dx$?

- (A) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$ (B) $\int_0^\pi \cos x \, dx$ (C) $\int_{-\pi}^0 \sin x \, dx$ (D) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$ (E) $\int_\pi^{2\pi} \sin x \, dx$
-

22. 若 $\int_a^b f(x) \, dx = 7$ and $\int_a^b g(x) \, dx = -11$, 下列何者為真 ?

- I. $f(x) > g(x)$ for $a \leq x \leq b$ II. $\int_a^b (f(x) + g(x)) \, dx = -4$ III. $\int_a^b (f(x)g(x)) \, dx = -77$

- (A) 只有 I (B) 只有 II (C) 只有 III (D) 只有 II 跟 III (E) I, II 與 III
-

23. 若 $f(x) = \begin{cases} x & \text{當 } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{當 } x > 1, \end{cases}$ 則 $\int_0^e f(x) \, dx =$

- (A) 0 (B) $\frac{3}{2}$ (C) 2 (D) e (E) $e + \frac{1}{2}$
-

24. 若 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 為一連續函數, 則存在 c 滿足 $a < c < b$ 且 $\int_a^b f(x) \, dx =$

- (A) $\frac{f(c)}{b-a}$ (B) $\frac{f(b) - f(a)}{b-a}$ (C) $f(b) - f(a)$ (D) $f'(c)(b-a)$ (E) $f(c)(b-a)$
-

25. 若 $\int_a^b f(x) \, dx = a + 2b$, 則 $\int_a^b (f(x) + 5) \, dx =$

- (A) $a + 2b + 5$ (B) $5b - 5a$ (C) $7b - 4a$ (D) $7b - 5a$ (E) $7b - 6a$
-

第二部分：非選擇題

1. 若函數 f 定義為 $f(x) = \frac{ax+b}{x^2-c}$ 且滿足下列性質：

- 函數 f 的圖形對稱於 y -軸
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$
- $f'(1) = -2$

(a) 求 a, b 與 c 之值

(b) 寫出函數 f 圖形的所有垂直與水平漸近線

2. 考慮函數 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 之圖形。

(a) 第一階導數為 , 第二階導數為 ,

(b) 臨界點為 , 反曲點為 ,

(c) 遞減區間為 , 遞增區間為 ,

(d) 上彎區間為 , 下彎區間為 ,

(e) 水平漸近線為 , 垂直漸近線為 ,

(f) 圖形為