

數學論證之藝術課前測驗

系級：_____ 學號：_____ 姓名：_____ 分數：_____

0 上課法則如下：

- 開心：帶著好心情來上課並且專心聽講作筆記；
- 張眼：萬一睡著了，沒關係，但記得張開眼睛；
- 閉口：請閉尊口，這包括有不說、不吃東西等；
- 關機：這包括手機、筆電等物品，違者充公也。

1 面積與體積：(將論證過程寫在「為什麼？」下面的空白處)

(a) 直徑為 d 之圓所包圍區域的面積是

。為什麼？

(b) 球徑為 a 之球所包圍區域的體積是

。為什麼？

2 正餘弦函數：令平面上的一點 P 之座標為 (x, y) 且令 θ 為正 x -軸至 \overrightarrow{OP} 射線之夾角，則

(a) 線段 \overline{OP} 之長度 r 等於

。

(b) 角 θ 之正弦函數值 $\sin \theta$ 等於

。

(c) 角 θ 之餘弦函數值 $\cos \theta$ 等於

。

3 極限的觀念：(將論證過程寫在「為什麼？」下面的空白處)

(a) 極限 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta}$ 之值為 。為什麼？

(b) 極限 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta}$ 之值為 。為什麼？

(c) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 之值為 。為什麼？

4 無窮級數和：(將論證過程寫在「為什麼？」下面的空白處)

(a) 幾何級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$ 之和為 。為什麼？

(b) 加權幾何級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \dots$ 之和為 為什麼？

(c) 伸縮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \dots$ 之和為 為什麼？

(d) 無窮級數 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots$ 之和為 為什麼？

5 有限級數和：(將論證過程寫在「為什麼？」下面的空白處)

(a) 前 n 個自然數之和 $1 + 2 + 3 + \dots + n$ 的公式為 為什麼？

(b) 前 n 個自然數之平方和 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ 的公式為 。為什麼？

(c) 前 n 個自然數之立方和 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ 的公式為 。為什麼？

(d) 前 n 個自然數之四次方和 $1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4$ 的公式為 。為什麼？

(e) 前 1000 個自然數之十次方和 $1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \cdots + 1000^{10}$ 為 。