

# 代數學預習測驗 #20

12/06/2013(五)

姓名：\_\_\_\_\_ 系級：\_\_\_\_\_ 學號：\_\_\_\_\_ 分數：

Read Chapter 15B – Ring Homomorphisms (pages 285-291) and answer the following questions.  
Suggested Homework Problems (pages 289-296: 13, 14, 16, 18, 21, 32, 66)

1. 令  $R$  為一具乘法單位元素  $1_R$  的環；考慮函數  $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow R$ , 其中  $\phi(k) = k1_R, \forall k \in \mathbb{Z}$ 。

(a) 請證明  $\phi$  是從整數環到環  $R$  的同態函數 (homomorphism)。

(b) 因為核  $\text{Ker } \phi$  是整數環  $\mathbb{Z}$  的一個理想子環，而整數環中的每一個理想子環都是主理想子環；因此之故  $\text{Ker } \phi = n\mathbb{Z}$ ，其中  $n$  為 。

(c) 若  $n$  是正整數，那麼這個正整數就是  $R$  的特徵數；在這種情況之下，環  $R$  包含一個跟模  $n$  之下的整數環  $\mathbb{Z}_n$  有相同結構的子環  $S =$  。

(d) 剩下來的情況是  $n = 0$ ，此時  $R$  的特徵數  $\text{char}(R)$  就是 0；而  $R$  則包含一個跟  有相同結構的子環。

2. 令  $F$  為一體；考慮函數  $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow F$ , 其中  $\phi(k) = k1_F, \forall k \in \mathbb{Z}$ 。因為體的特徵數，不是質數就是 0；上題得知，我們有底下兩種情況。

(a) 若  $F$  的特徵數為質數  $p$ ，則  $F$  包含一個跟  有相同結構的子體  $S =$  。

(b) 若  $F$  的特徵數為 0，則  $F$  包含一個跟  有相同結構的子體  $T =$  。

實際上，體  $F$  包含有一個最小的子體；這個子體稱之為 ；上面所描述的是其內部

構造的成份。你能從外部的構造來描述嗎？

3. 請簡要描述如何從一個整域  $D$  來建造一個體，此體包含與整域  $D$  有相同構造的子環。

4. 請問特徵數為質數  $p$  的體，其元素個數一定是有限的嗎？若是，則證明之；若否，請舉一反例。