

代數學預習測驗 #18

11/29/2013(五)

姓名：_____ 系級：_____ 學號：_____ 分數：

Read Chapter 14B – Factor Rings (pages 269-271, 273) and answer the following questions.
Suggested Homework Problems (pages 274-277: 10, 14, 16, 29, 41, 46, 58)

1. 令 R 為一環且令 A 為環 R 的一個理想。

(a) 何謂商環 (factor ring or quotient ring) R/A ?

(b) 商環 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ 與模 6 之下的整數環 \mathbb{Z}_6 有何不同 ?

(c) 商環 $2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ 與模 3 之下的整數環 \mathbb{Z}_3 有何不同 ?

(d) 商環 $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 + 1 \rangle$ 與複數體 \mathbb{C} 有何不同 ?

2. 請問商環 R/I 的元素個數 $|R/I|$ 是多少 ? 其中的 R 與 I 如下 :

(a) 令 $R = M(2, \mathbb{Z})$ 為佈於整數的二階方陣環且令 $I = M(2, 2\mathbb{Z}) \subseteq R$ 為佈於偶數的二階方陣子環。

(b) 令 $R = \mathbb{Z}[i]$ 為高斯整數環且令 $I = \langle 2 - i \rangle$ 為 $2 - i$ 生成的主理想子環。

3. 令 R 為一具乘法單位元素的交換環且令 A 為環 R 的一個理想。

(a) 若 A 是一個質理想 (prime ideal), 請問商環 R/I 的代數結構為何 ?

(b) 若 A 是一個最大理想 (maximal ideal), 請問商環 R/I 的代數結構為何 ?