

代數學預習測驗 #17

11/27/2013(三)

姓名：_____ 系級：_____ 學號：_____ 分數：

Read Chapter 14A – Ideals, Prime and Maximal Ideals (pages 267-268, 272) and answer the following questions.

1. 令 R 為一環 (ring)。

(a) 何謂環 R 的一個理想 (ideal)？

(b) 對環 R 的一個非空子集 A ，如何判斷 A 是否成為環 R 的一個理想？

2. 令 R 為一具乘法單位元素的交換環且令 $a, a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ 。

(a) 何謂由元素 $a \in R$ 生成的主理想 $\langle a \rangle$ (principal ideal generated by a)？

(b) 何謂由元素 $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ 生成的理想 $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ (ideal generated by a_1, a_2, \dots, a_n)？

(c) 令 $R = \mathbb{R}[x]$ 且令 $A \subset R$ 為所有常數項 = 0 之多項式集，不難證明 A 是環 R 的一個理想。請證明 $A = \langle x \rangle$ 是元素 $x \in R$ 生成的主理想。

(d) 令 $R = \mathbb{Z}[x]$ 且令 $S \subset R$ 為所有常數項是偶數之多項式集，不難證明 S 是環 R 的一個理想。請證明 $A = \langle x, 2 \rangle$ 是元素 $x, 2 \in R$ 生成的理想。

3. 令 R 為一交換環 (commutative ring)。

(a) 何謂環 R 的一個質理想 (prime ideal)？

(b) 何謂環 R 的一個最大理想 (maximal ideal)？

(c) 找出模 36 之下的整數環 \mathbb{Z}_{36} 所有的最大理想？

(d) 在實係數的多項式環 $\mathbb{R}[x]$ 裡，主理想 $\langle x^2 + 1 \rangle$ 是最大理想嗎？