

代數學預習測驗 #15

11/20/2013(三)

姓名：_____ 系級：_____ 學號：_____ 分數：

Read Chapter 12 – Introduction to Rings (pages 245-250) and answer the following questions.
Suggested Homework Problems (pages 250-253: 2, 6, 18, 22, 28, 29, 50)

1. 擁有兩個二元運算 $*_1, *_2$ 的集合 R ；若滿足下述三個性質者，我們就說 R 在運算 $*_1, *_2$ 之下形成一個環或說 $(R, *_1, *_2)$ 是一個環。

(a) $(R, *_1)$ 是一個 群， (b) $*_2$ 是 ，

(c) 運算 $*_2$ 對運算 $*_1$ 的 成立： $a *_2 (b *_1 c) = (a *_2 b) *_1 (a *_2 c)$ ， $\forall a, b, c \in R$ ，

$$(b *_1 c) *_2 a = (b *_2 a) *_1 (c *_2 a), \quad \forall a, b, c \in R。$$

習慣上，我們把環裡面的第一個運算稱之為加法，用符號「+」來表示；而第二個運算則稱之為乘法，用符號「 \cdot 」來表示。因此，我們也習慣將第一個運算的單位元素稱之為加法單位元素且用「0」來表示；而第二個運算的單位元素，若存在則稱之為乘法單位元素且用「1」來表示。記住，這只是一個習慣用法；所以當你看到在一個環或體裡面的0(或1)，那指的就是加法單位元素0(或乘法單位元素1)，而跟整數裡的0(或1)一點關係也沒有。

當然啦，整數環 $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 遠比一般的環還好很多；那就是第二個運算不僅有單位元素而且還是可交換的，這一種環通常稱之為具乘法單位元素的交換環 (commutative ring with unity)。與此相對的

有 是一個擁有乘法單位元素的非交換環 (noncommutative ring with unity)；

還有那 則是不具乘法單位元素的交換環 (commutative ring without unity)。

2. (a) 是否存在一個具乘法單位元素的交換環，其子環不具乘法單位元素？

- (b) 是否存在一個具乘法單位元素的交換環，其子環擁有不同的乘法單位元素？

- (c) 是否存在一個非交換環，其子環是一個交換環？

3. 令 R 為一具乘法單位元素的交換環。一個元素 $u \in R$ 稱之為可逆元素 (unit)，若 u 整除 R 裡頭的乘法單位元素； R 中所有可逆元素的集合通常以符號 R^\times 表示之，稱之為可逆元素群。請決定下列四個環的可逆元素群：

(a) $\mathbb{Z}^\times =$ ， $\mathbb{Z}[i]^\times =$ ；

(b) $\mathbb{Z}[x]^\times =$ ， $\mathbb{R}[x]^\times =$ 。