

# 代數學預習測驗 #11

10/25/2013(五)

姓名：\_\_\_\_\_ 系級：\_\_\_\_\_ 學號：\_\_\_\_\_ 分數：

分數
----

Read Chapter 8 – External Direct Products (pages 162-168) and answer the following questions.  
Suggested Homework Problems (pages 174-179: 2, 6, 8, 18, 32, 38, 74)

1. 令  $n \in \mathbb{N}$  且令  $G_1, \dots, G_n$  為  $n$  個群。

(a) 何謂此  $n$  個群的外直積 (external direct product)  $G = G_1 \oplus \dots \oplus G_n$  ?

(b) 若  $g = (g_1, \dots, g_n) \in G$ , 請問元素  $g$  的週期與元素  $g_1, \dots, g_n$  的週期之間有何等關係 ?

2. 外直積之元素的週期

(a) 列出群  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$  中所有的元素並算出每一個元素的週期。

元素	(0,0)			
週期	1			

(b) 請問  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$  是循環群嗎 ?

(c) 若  $G_1, G_2$  是有限循環群，請問  $G_1 \oplus G_2$  也是循環群的充要條件是什麼 ?

(d) 若  $G_1, G_2, \dots, G_k$  是有限循環群，請問  $G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_k$  也是循環群的充要條件是什麼 ?

(e) 令  $m = n_1, \dots, n_k$  為  $k$  個正整數之乘積，請問  $\mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{n_k} \approx \mathbb{Z}_m$  的充要條件是什麼 ?

3. 模  $n$  之下可逆元素群：  $\mathbb{Z}_n^\times = U(n)$

(a) 若  $s, t \in \mathbb{N}$ , 請問何時  $U(st) \approx U(s) \oplus U(t)$  ?

(b) 何謂  $U_{11}(77)$  ? 請直接證明  $U_{11}(77)$  是與  $U(7)$  同構的一個循環群。

(c) 令  $m = n_1, \dots, n_k$  為  $k$  個正整數之乘積，請問何時  $U(m) \approx U(n_1) \oplus U(n_2) \oplus \dots \oplus U(n_k)$  ?

(d)  $U(2) \approx \square$ ,  $U(4) \approx \square$ ,  $U(2^n) \approx \square$  ( $n \geq 3$ ),  $U(p^n) \approx \square$  ( $n \in \mathbb{N}$ )