

代數學預習測驗 #10

10/23/2013(三)

姓名：_____ 系級：_____ 學號：_____ 分數：

--

Read Chapter 7 – Cosets and Lagrange’s Theorem (pages 144-151) and answer the following questions.
Suggested Homework Problems (pages 156-160: 1, 7, 10, 21, 22, 46, 57)

1. 令 G 為一群且令 $a \in G$ 。令 $H < G$ 。
 - (a) 何謂包含元素 a , 子群 H 的左陪集 (left coset of H containing a) aH ?
 - (b) 何謂包含元素 a , 子群 H 的右陪集 (right coset of H containing a) Ha ?
 - (c) 是否 $aH = Ha$? 若是, 請證明之; 若否, 請舉反例。
 - (d) 何時左陪集 aH 會等於右陪集 Ha 呢?
 - (e) 是否 $aH < G$ 永遠正確?
 - (f) 何時左陪集 aH 會是 G 的一個子群?

2. 令 G 為一有限群且令 $H < G$ 。
 - (a) 拉格蘭日定理 (Lagrange’s Theorem) 告訴我們什麼?
 - (b) 在有限群 G 中, H 的左陪集有多少? 又有多少 H 的右陪集呢?
 - (c) 若 $a \in G$, 請問元素 a 的週期 $|a|$ 與群 G 的元素個數 $|G|$ 有何關係?
 - (d) 若群 G 的元素個數 $|G|$ 是一個質數, 證明 G 必定是一個循環群。
 - (e) 若 $a \in G$, 證明 $a^{|G|}$ 必定是單位元素 e 。
 - (f) 說明一下為什麼費馬小定理與歐拉定理都是上述結果的特例而已。
 - (g) 拉格蘭日定理的逆敘述是否永遠正確? 若是, 請證明之; 若否, 請舉反例。