

代數學預習測驗 #06

10/04/2013(五)

姓名：_____ 系級：_____ 學號：_____ 分數：

--

Read Chapter 4 – Cyclic Groups (pages 77-82) and answer the following questions.
Suggested Homework Problems (pages 87-92: 1, 9, 10, 17, 30, 38, 63)

1. 何謂循環群 (cyclic group) ? 何謂其生成元素 (generator) ? 循環群的生成元素是唯一的嗎 ?

2. 考慮 \mathbb{Z}_n 之下的乘法群 \mathbb{Z}_n^\times 。

(a) 乘法群 $\mathbb{Z}_9^\times = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ 是一個循環群嗎 ?

(b) 乘法群 $\mathbb{Z}_{12}^\times = \{1, 5, 7, 11\}$ 是一個循環群嗎 ?

(c) 乘法群 $\mathbb{Z}_{13}^\times = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ 是一個循環群嗎 ?

3. 令 G 為一群且令 $a \in G$ 其週期為 $|a| = n \in \mathbb{N}$ 。

(a) 若存在 $m \in \mathbb{Z}$ 使得 $a^m = e$ ，證明 $n \mid m$ 。

(b) 若 k 為一正整數，請問 $|a^k|$ 是多少 ? 請證明你自己的答案。

4. 請敘述循環群基本定理 (Fundamental Theorem of Cyclic Groups)。