

代數學診斷考試

09/11/2013(三)

姓名：_____ 系級：_____ 學號：_____ 分數：

- 內規：預習是修課必要且是第一重要的步驟，所以我們設計了24個預習測驗來幫助你更有效的學習。因此，預習測驗不交就不得參加微世紀考試、期中考試或期末考試；換句話說，你已被勒令退選。
- 成績：預習測驗每次10點，微世紀考試每次100點，期中考試及期末考試每次200點；總共點數840，你所得點數除以8.4就是你的的學期成績。
- 符號：數學中慣用者有自然數集 \mathbb{N} 、整數集 \mathbb{Z} 、有理數集 \mathbb{Q} 、實數集 \mathbb{R} 、複數集 \mathbb{C} 。

1. 整數 \mathbb{Z} 是我們的老朋友，打從國小就開始交往；加減乘除和差積商，四則運算你樣樣精通。你知道什麼是整除；不能整除時，你也知道怎麼得到商跟餘數的演算法（通常稱之為長除法或歐幾里得演算法）。你更知道什麼是質數、因數與倍數；還有那稱之為算術基本定理老兄（每個整數都可以唯一寫成質因數的乘積）。

(a) 其實，在這些耳熟能詳之性質的背後；有一重要無比又媚力十足的原理，稱之為

原理（每一個正整數的非空集合必包含有一

）。我們可以用此原理

來證明數學

原理（實際上，這兩個原理在邏輯上是等價的）。

(b) 令 $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 且令 $S = \{am + bn \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ ，則不難看出 S 包含有正整數。根據上述原理， S 包含一最小正整數；證明此最小正整數就是 a, b 的最大公因數（在此你必須證明 d 是公因數，i.e. $d \mid a, d \mid b$ 以及對任意的公因數 $d', d' \mid d$ ）。

(c) 何謂質數？若 p 為質數且 $p \mid ab$ ，證明 $p \mid a$ 或 $p \mid b$ 。

2. 請問一個微世紀差不多是幾分鐘(一年以 365 天來算)？

3. 函數，則是我們的另一位老朋友；雖然在國中或高中才認識，卻是更上一層樓不可少的朋友。你知道什麼是函數的定義域，什麼是函數的對應域；你也知道什麼是一對一函數，什麼是映成函數現在我們來觀察從平面上的一個正方形 S 映到他自己的保距函數(isometry)，所有這種函數所成的集合以符號 $G = \text{Isom}(S)$ 表示。你學過如何將 G 中的函數合成，而且不難證明合成後的函數還是一個保距函數；亦即合成後的函數仍然在 G 中，所以函數合成乃是集合 G 上面的一個二元運算。若 $f \in G$ ，則以符號 f^n 表示 n 個 f 合成之後的函數。

(a) 將正方形 S 沿著中心點逆時針旋轉 $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ ；分別以符號 $R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}$ 表示之。
不難看出 $R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}$ 都是 G 中的函數，證明 $R_{90}^2 = R_{180}, R_{90}^3 = R_{270}, R_{90}^4 = R_0$ 。

(b) 將正方形 S 沿著南北兩邊中點連線翻轉(即東西翻轉)，以符號 F_1 表示之。將正方形 S 沿著東西兩邊中點連線翻轉(即南北翻轉)，以符號 F_2 表示之。將正方形 S 沿著主對角線翻轉(即東北西南翻轉)，以符號 F_3 表示之。將正方形 S 沿著逆對角線翻轉(即東南西北翻轉)，以符號 F_4 表示之。
證明 $F_1^2 = R_0, F_2^2 = R_0, F_3^2 = R_0, F_4^2 = R_0$ 。

(c) 實際上， G 就只包含這八個函數 $G = \{R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}, F_1, F_2, F_3, F_4\}$ ；其中 R_0 為自等函數，所以跟任何其他函數合成就是任何其他函數。顯而易見， $R = \{R_0, R_{90}, R_{180} = R_{90}^2, R_{270} = R_{90}^3\}$ 此四函數彼此之間的合成還是在 R 中；因為 $R_{90}^4 = R_0$ ， R 在 G 中擁有一片天地，自得其樂。至於旋轉與翻轉的合成以及翻轉之間的合成又如何呢？就看諸位帥哥美女囉，這是你大顯身手的時候。例如：計算 $F_1 \circ F_3$ 時先將正方形 S 沿著主對角線翻轉再東西翻轉，所得到的結果就如同將正方形 S 沿著中心點逆時針旋轉 270° 一樣；所以我們有 $F_1 \circ F_3 = R_{270}$ ，此元素寫在第 F_1 列第 F_3 行的位置。如下所示：請完成 G 中的 8×8 運算表。

\circ	R_0	R_{90}	R_{180}	R_{270}	F_1	F_2	F_3	F_4
R_0	R_0	R_{90}	R_{180}	R_{270}	F_1	F_2	F_3	F_4
R_{90}	R_{90}	R_{180}	R_{270}	R_0				
R_{180}	R_{180}	R_{270}	R_0	R_{90}				
R_{270}	R_{270}	R_0	R_{90}	R_{180}				
F_1	F_1						R_{270}	
F_2	F_2							
F_3	F_3							
F_4	F_4							