

Coding Theory: Solutions to Mid-term Exam

1. 碼的基本觀念：

(a) 若二進制對稱頻道之 1-錯誤與 0-錯誤的機率為 $p = \frac{1}{4}$ 。請問傳送長度為 6 的字串，發生 3 個錯誤的機率是多少？

(b) 寫出所有長度為 6，權重為 2 的錯誤圖樣。

(c) 若二進制碼 $C = \{0000, 1100, 0110, 1011, 1010, 1101, 0111, 0001\}$ ，請問碼 C 可偵測到錯誤圖樣 $e = 1000$ 嗎？

2. 漢明距離：令 n 為一正整數且令 $v, w \in \mathbb{F}_2^n$ 。我們定義 v 與 w 的漢明距離為 v 與 w 相異的位元數，用符號 $d(v, w)$ 表示之。

(a) 證明 d 的確是一個度量(metric)。

證明：

i. $d(u, v) = 0$

\iff 此二數串相異位元的個數為0

\iff 此二數串沒有相異位元

\iff 此二數串每一個位元都一樣

$\iff u = v$

ii. 顯而易見，我們有 $d(u, v) = d(v, u) \forall u, v$.

iii. 想想若 u 跟 v 在某一個位元不一樣，那麼把 w 跟 u 與 w 跟 v 在這個位置的元素比較一下，馬上看出有一對不一樣或兩對都不一樣。因此得到 u 跟 v 相異位元的個數小於或等於 u 跟 w 相異位元的個數加上 w 跟 v 相異位元的個數。

(b) 令 $C = \{11111111, 10101010, 11001100, 10011001, 11110000, 10100101, 11000011, 10010110\}$ 為一分組碼，其中任何兩個碼字串的距離都是 4。證明碼 C 是 1-錯誤更正碼。

3. 若 C 為一分組碼，定義碼 C 的漢明距離為

$$\min\{d(x, y) \mid x, y \in C, x \neq y\},$$

用符號 $d(C)$ 表示之。

(a) 令碼 $C = \{000000, 110011, 010011, 101101, 101111\}$ 。求 $d(C) = ?$ 是否為 1-錯誤偵測碼？請說明之。

(b) 證明碼 C 是 $d(C)-1$ -錯誤偵測碼。

◇♡ 證明 ♡◇

令 $s = d(C) - 1$ ，則 $s < d(C)$ 。若碼字串 c 傳送時有 s 個或更少的錯誤發生，則接收字串 r 不可能又是碼字串；因 $d(C) \geq s + 1$ 就是足以將一個碼字串改變而成另一個碼字串之錯誤位元個數的最小值。因此，可偵測到錯誤。

(c) 證明碼 C 是 $\left\lfloor \frac{d(C) - 1}{2} \right\rfloor$ -錯誤更正碼，此處 $[x]$ 乃不大於 x 之最大整數。

◇♡ 證明 ♡◇

$$\text{令 } t = \left\lfloor \frac{d(C) - 1}{2} \right\rfloor, \text{ 則 } t \leq \frac{d(C) - 1}{2} \iff 2t + 1 \leq d(C)$$

若碼字串 c 傳送時有 t 個或更少的錯誤發生，則接收字串 r 與 c 的距離不超過 t ；即 $d(c, r) \leq t$ 。對任何與 c 相異的碼字串 c_1 ，我們必定有 $d(c_1, r) \geq t + 1$ ；否則的話， $d(c_1, r) \leq t$ 。三角不等式告訴我們

$$2t + 1 \leq d(C) \leq d(c, c_1)$$

$$d(c, c_1) \leq d(c, r) + d(c_1, r)$$

$$d(c, r) + d(c_1, r) \leq t + t = 2t,$$

矛盾出現。因此， $d(c_1, r) \geq t + 1 > t$ ，這意味著 c 是最接近 r 唯一的碼字串。根據最近鄰解碼原理，將 r 解碼為 c 。

(d) 令碼 $C = \{1101, 1100, 0000, 0111\}$ 。若 $p = 0.09$ ，求各碼字串傳送成功的機率。

接收數串 w	錯	誤	圖	樣	解碼所得 v
0001	$1101 + w$	$1100 + w$	$0000 + w$	$0111 + w$	
0010					
0011					
0100					
0101					
0110					
0111					
1000					
1001					
1010					
1011					
1100					
1101					
1110					
1111					
0000					

因 $p = 0.09$ 為二進制對稱頻道的錯誤機率。令 $\delta(v, w)$ 為傳送 v 而接收 w 的機率。

傳送1101成功的機率：

傳送1100成功的機率：

傳送0000成功的機率：

傳送0111成功的機率：