微積分 A 模擬試題

1. 暖身必考題：

   (a) 寫出函數 f 在區間 $[a,b]$ 上的定積分之定義。

   (b) 敘述微積分基本定理(Fundamental Theorem of Calculus)。

2. 【微積分基本定理】微分與積分的觀念，感覺上(從幾何意義上來看)好像是沒什麼關係。然而，令人驚奇的是這兩個觀念不僅有關係而且關係非常密切。所以貫穿其間關係的定理，理所當然的就稱之爲微積分基本定理。

   【微分形式】若 $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 爲一連續函數，則函數 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt,\quad x\in[a,b]$ 在每一個 $x\in(a,b)$ 都是可微分的，而且

   ⊙ $F'(x)=$ $\boxed{}$ 。

   換句話說，若 f 的積分是 F 則 F 的微分就是 f 。更口語話的說，反應整體性質的積分是由反應局部性質的微分所決定。

   【積分形式】若 F 在 $[a,b]$ 上是可微分的，而且 $F'(x)=f(x)$ 爲 $[a,b]$ 上的連續函數，則

   ⊙ $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=$ $\boxed{}$ 。

   換句話說，若 F 的微分是 f 則 f 的積分就是 F (或差一個常數)。更口語話的說，反應局部性質的微分是由反應整體性質的積分所決定。

3. 求下列各極限之值：

   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^9+\left(\frac{2}{n}\right)^9+\left(\frac{3}{n}\right)^9+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^9\right]$

   (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+n}\right)$

   (c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

   (d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\sin\frac{\pi i}{n}\right)\frac{\pi}{n}$,

   (e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(i/n)^2}$

4. 試求下列各定積分之值：

   (a) $\displaystyle\int_{-2}^{0}\sqrt{4-t^2}\,dt$, $\displaystyle\int_0^4\frac{t}{\sqrt{t^2+9}}\,dt$

   (b) $\displaystyle\int_1^4 x^2\sqrt{x-1}\,dx$, $\displaystyle\int_0^{\pi/2}e^{\cos x}\sin x\,dx$

   (c) $\displaystyle\int_1^2\frac{x^2+2x}{x^3+3x^2-1}\,dx$, $\displaystyle\int_1^e\frac{\ln x}{x}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \sec^3 x \tan^3 x \, dx$,　　$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}} \, dx$

(e) $\displaystyle\int_e^{e^4} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} \, dx$,　　$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^5 x \, dx$

(f) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+1} \, dx$,　　$\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{2y+1}} \, dy$

(g) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} \, dx$,　　$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin x} \, dx$

(h) $\displaystyle\int_0^{e^{\pi/2}} \frac{\cos(\ln x)}{x} \, dx$,　　$\displaystyle\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$

5. 試求下列各不定積分：

(a) $\displaystyle\int 16x(x^2+11)^7 \, dx$,　　$\displaystyle\int (x+7)(x-11)^{123} \, dx$

(b) $\displaystyle\int \tan^4 x \, dx$,　　$\displaystyle\int \cos(\ln x) \, dx$

(c) $\displaystyle\int \ln(x^2+1) \, dx$,　　$\displaystyle\int xe^{-2x} \, dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x+1)^{10}} \, dx$,　　$\displaystyle\int \frac{1+x}{1+x^2} \, dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+7}} \, dx$,　　$\displaystyle\int (x^2+1)e^{-x} \, dx$

(f) $\displaystyle\int \sin\sqrt{x} \, dx$,　　$\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{25-x^2}} \, dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{x}}} \, dx$,　　$\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \, dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(36+x^2)^{3/2}} \, dx$,　　$\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{6x-12}} \, dx$

6. 定積分之應用：

(a) 求曲線 $y = \dfrac{1}{6}(x^2+4)^{\frac{3}{2}}$, $\quad 0 \le x \le 3$ 之長度。

(b) 求函數圖形 $y = (4 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ 在 $x = 1$ 與 $x = 8$ 之間的長度。

(c) 考慮函數 $f(x) = \dfrac{x^4}{16} + \dfrac{1}{2x^2}$, $\quad x \in [1,2]$, 求曲線段 $y = f(x)$, $\quad x \in [1,2]$ 的長度。

(d) 考慮函數 $f(x) = \dfrac{x^4+3}{6x}$, $x \in [1,3]$。令 R 爲函數圖形 $y = f(x)$ 下方所包圍的區域。

i. 求函數 $y = f(x)$ 在區間 [1,3] 之函數值的平均值。

ii. 求函數圖形 $y = f(x)$ 的長度。

iii. 求區域 R 之面積。

iv. 將區域 R 繞 x-軸旋轉一圈所得之旋轉體，求其體積。

(e) 求在 $x = 0$ 與 $x = \frac{5\pi}{2}$ 之間，曲線 $y = x\sin x$ 與直線 $y = x$ 所包圍區域的面積。

(f) 求 c 之值使得兩拋物線 $y = x^2 - c^2$, $\quad y = c^2 - x^2$ 之間所包圍區域的面積等於 576。

(g) 將兩拋物線 $y = x^2$, $\quad y^2 = x$ 之間所包圍區域繞著 x-軸旋轉之旋轉體體積等於多少。