微積分 A【上】考古題

1. 定積分：
   (a) 試寫出函數 f 在區間 $[a,b]$ 上的定積分之定義。
   (b) 請敘述微積分基本定理 (Fundamental Theorem of Calculus)。
   (c) 試求 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{1+x^2}\frac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}\,dt$。
2. 試求下列各積分 (可能是瑕積分) 之值：
   (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$
   (b) $\displaystyle\int_{1}^{4}x^2\sqrt{x-1}\,dx$
   (c) $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{x^2+2x}{x^3+3x^2-1}\,dx$
   (d) $\displaystyle\int_{1}^{4}\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$
   (e) $\displaystyle\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x}\,dx$
   (f) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}x\sin x\,dx$
   (g) $\displaystyle\int_{0}^{1}\sin(\ln x)\,dx$
   (h) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}te^{-t}\,dt$
3. 試求下列各不定積分：
   (a) $\displaystyle\int 2x(x^2+7)^{11}\,dx$
   (b) $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{x^3+11}}\,dx$
   (c) $\displaystyle\int\frac{x^2+2x-7}{\sqrt{x}}\,dx$
   (d) $\displaystyle\int\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$
   (e) $\displaystyle\int\frac{x^3}{x^2+x-2}\,dx$
   (f) $\displaystyle\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx$
   (g) $\displaystyle\int\frac{x^3}{(16+x^2)^{3/2}}\,dx$
   (h) $\displaystyle\int\frac{1}{1-e^{-x}}\,dx$
4. 定積分之應用：
   (a) 試求在 $x=0$ 與 $x=\frac{5\pi}{2}$ 之間，曲線 $y=x\sin x$ 與直線 $y=x$ 所包圍區域的面積。
   (b) 求函數圖形 $y=(4-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ 在 $x=1$ 與 $x=8$ 之間的長度。
   (c) 考慮函數 $f(x)=\dfrac{x^4+3}{6x}$, $x\in[1,3]$。令 R 爲函數圖形 $y=f(x)$ 下方所包圍的區域。
      i. 求函數圖形 $y=f(x)$ 的長度。
      ii. 將區域 R 繞 x-軸旋轉一圈所得之旋轉體，試求其體積。
      iii. 將區域 R 繞 y-軸旋轉一圈所得之旋轉體，試求其體積。
5. 試求下列極限之值：
   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\sin\frac{\pi i}{n}\right)\frac{\pi}{n}$。
   (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$

1. 【定積分基本觀念】定積分的觀念源自求面積的問題，以窮盡法解決之。令 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 爲一函數。將區間 $[a,b]$ 分割成 n 個子區間 $[x_{j-1},x_j],\ j=1,2,3,\cdots,n$,用符號 $\mathcal{P}=\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\}$ 表示這些分割點所成的集合並稱之爲區間 $[a,b]$ 的一個分割。在每一個子區間上，選取一點 $x_j^*\in[x_{j-1},x_j]$,並形成黎曼和 $\sum_{j=1}^{n} f(x_j^*)\Delta x_j$,其中 Δx_j 爲子區間 $[x_{j-1},x_j]$ 之長度。定義分割 $\mathcal{P}$ 的大小爲 $|\mathcal{P}|=\max_{j=1}^{n}\{\Delta x_j\}$。若下列極限值存在 $\lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{j=1}^{n} f(x_j^*)\Delta x_j$,則我們說函數 f 在區間 $[a,b]$ 上是可積分的，並將此極限值稱之爲函數 f 在區間 $[a,b]$ 上的定積分且以符號 $\int_a^b f(x)\,dx$ 表示之。在實際的計算當中，通常我們將區間 $[a,b]$ 分割成 n 等分，因而 $\Delta x_j=(b-a)/n\ \forall j$,故得 $x_j=a+j\cdot\frac{b-a}{n}\quad\forall 1\le j\le n$ 。選取 $x_j^*=x_j$,所要計算的極限值變成

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} f(a+j\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n}$$

若函數 $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\{\text{正實數}\}$,則定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 之幾何意義爲函數圖形 $y=f(x)$ 下方在區間 $[a,b]$ 上之區域的面積。

(a) 定積分 $\int_{-2}^{0}\sqrt{4-x^2}\,dx$ 之值爲 $\boxed{}$

(b) 若函數 $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 擁有一個反導數 F,則定積分 $\int_a^b f(x)\,dx=$ $\boxed{}$

(c) 極限 $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n+j}$ 之值爲 $\boxed{}$

2. 【微積分基本定理】微分與積分的觀念，感覺上(從幾何意義上來看)好像是沒什麼關係。然而，令人驚奇的是這兩個觀念不僅有關係而且關係非常密切。所以貫穿其間關係的定理，理所當然的就稱之爲微積分基本定理。

(a) 【微分形式】若 $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 爲一連續函數，則函數 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt,\quad x\in[a,b]$ 在每一個 $x\in(a,b)$ 都是可微分的，而且

$F'(x)=$ $\boxed{}$ 。

換句話說，若 f 的積分是 F 則 F 的微分就是 f 。口語的說，反應整體性質的積分是由反應局部性質的微分所決定。

(b) 【積分形式】若 F 在 $[a,b]$ 上是可微分的，而且 $F'(x)=f(x)$ 爲 $[a,b]$ 上的連續函數，則

$\int_a^x f(t)\,dt=$ $\boxed{}$ 。

換句話說，若 F 的微分是 f 則 f 的積分就是 F (或差一個常數)。口語的說，反應局部性質的微分是由反應整體性質的積分所決定。

(c) 令 $G(x)=\int_1^{x^2}\sqrt{-17+t^2}\,dt,$ 則 $G'(3)$ 之值爲 $\boxed{}$ 。

3. 【反導數的計算】

(a) 利用代換法算出定積分 $\int_0^2 6x\sqrt{4-x^2}\,dx$ 之值爲 $\boxed{}$ 。

(b) 利用代換法算出定積分 $\int_0^4\frac{10x}{(9+x^2)^{3/2}}\,dx$ 之值爲 $\boxed{}$ 。

(c) 利用分部法算出定積分 $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$ 之值爲 $\boxed{}$ 。

(d) 利用分部法算出定積分 $\int_0^1 xe^x\,dx$ 之值爲 $\boxed{}$ 。